Interrogation

H1 : Cinématique des fluides
Opérateurs différentiels

Questions

1) Définir le débit volumique à travers une surface $\mathcal{S}$, sous forme d'un flux. Pour quel type d'écoulement est-il conservé le long d'un tube de courant ?

2) Écrire l'équation locale de conservation de la masse, en fonction des champs $\varrho(\vec{r},\, t)$ et $\vec{v}(\vec{r},\, t)$. Que devient cette équation pour un écoulement incompressible ?

3) On donne la divergence en coordonnées cylindriques

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ainsi que le rotationnel en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_z}$$

Calculer la divergence puis le rotationnel du champ donné en coordonnées cylindriques par

$$\vec{v} = k\,r\,\vec{e_\theta} \qquad \text{avec} \qquad k \text{ une constante.}$$

4) On considère le champ en coordonnées cartésiennes $\vec{v} = k\left(x^2\,\vec{e_x} + 2\,y\,z\,\vec{e_z}\right)$. Calculer $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$.

Réponses

1) Le débit volumique à travers une surface $\mathcal{S}$ se calcule par

$$\boxed{D_V = \iint_{\mathcal{S}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}}$$

Il est conservé le long d'un tube de courant pour un écoulement **incompressible**.

Remarque. Si $\mathrm{d}V$ est le volume de fluide qui a traversé la surface $\mathcal{S}$ pendant $\mathrm{d}t$, le débit volumique est par définition

$$D_V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

2) L'équation locale de conservation de la masse s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\,\vec{v}) = 0}$$

Pour un écoulement incompressible, elle se simplifie en

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{v} = 0}$$

Remarque. La simplification provient du fait que pour un écoulement incompressible,

$$\frac{\mathrm{D}\varrho}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right) \varrho = 0$$

et par ailleurs

$$\operatorname{div}(a\,\vec{b}) = a \operatorname{div} \vec{b} + \vec{b} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, a$$

3) On calcule respectivement

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{v} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = 2\,k\,\vec{e_z}}$$

Remarque. Le champ de vitesse proposé est en fait purement orthoradial (selon $\vec{e_\theta}$ uniquement) donc il n'est pas étonnant que la divergence soit nulle et que le rotationnel soit selon $\vec{e_z}$. Au passage, les lignes de courant sont des cercles.

4) On calcule

$$\boxed{\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right) \vec{v} = 2\,k^2\,\left(x^3\,\vec{e_x} + 2\,y^2\,z\,\vec{e_z}\right)}$$