O5-Doc

Phénomènes d'absorption et de dispersion

On évoque dans ce document un autre aspect de la dispersion : **l'étalement du paquet d'onde.** Pour cela, on schématise trois propagations typiques : une propagation non dispersive ; une propagation faiblement dispersive (ce que nous avons vu en cours) ; et enfin une propagation plus dispersive. Le caractère « plus ou moins » dispersif doit être associé à la durée pendant laquelle on observe la propagation.

1 Propagation non dispersive

Une propagation non dispersive est une propagation pour laquelle la vitesse de phase est indépendante de la pulsation :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} \qquad \text{soit} \qquad \omega = v_\varphi\, k' \qquad \text{avec} \qquad v_\varphi \text{ une constante.}$$

La vitesse de groupe est dans ce cas $v_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k' = v_\varphi$. C'est notamment le cas de l'équation de d'Alembert (notons par ailleurs qu'en plus d'être non dispersive, l'équation de d'Alembert est aussi caractéristique d'une propagation sans absorption). Pour une telle propagation, toutes les OPPH, peu importe leurs pulsations, voyagent à la même célérité et par conséquent le paquet d'onde **conserve sa forme** au cours de la propagation. Schématiquement, cela correspond à la figure 1.

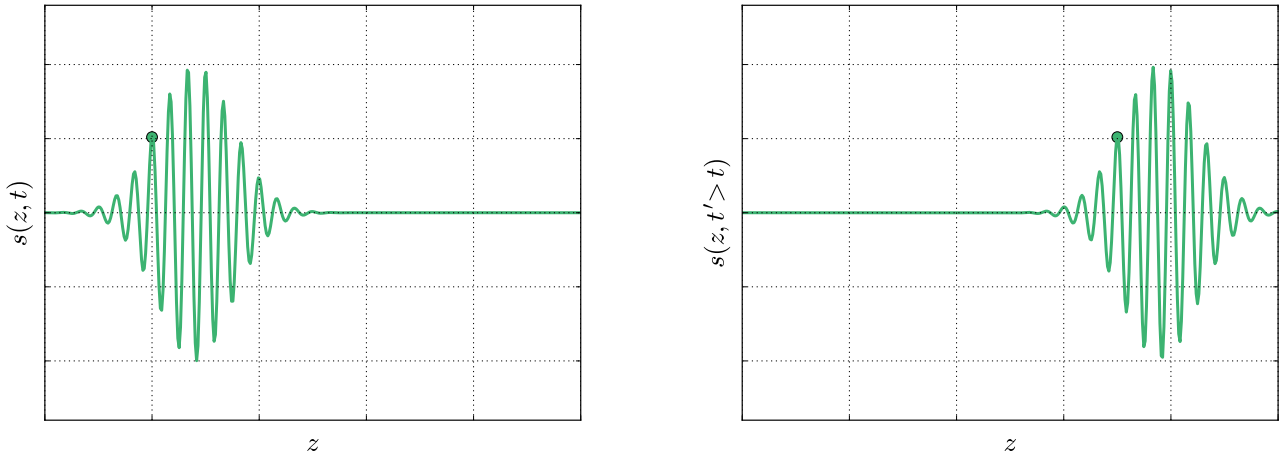

FIGURE 1 – **Propagation non dispersive.** Paquet d'onde à t (à gauche) et à $t' > t$ (à droite). Le paquet d'onde conserve sa forme tout le long de la propagation, et se propage « en bloc » à la célérité $v_g = v_\varphi$.

2 Propagation faiblement dispersive

C'est le cas du cours. En considérant un paquet d'onde, nous avons été amenés à utiliser un développement limité à l'ordre 1 de la relation de dispersion

$$k'(\omega) \approx k'(\omega_0) + (\omega - \omega_0)\,\frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0) = k'(\omega_0) + \frac{\omega - \omega_0}{v_g(\omega_0)}$$

Dans le cadre de ce développement, nous avons montré qu'un paquet d'onde s'écrit

$$\underline{s}(x,t) = \exp\Big(\mathrm{i}\,(\omega_0\, t - k_0\, x)\Big) \times \int \mathrm{d}\omega\, \underline{\mathcal{S}}(\omega)\, \exp\Big(\mathrm{i}\,(\omega - \omega_0)\big(t - x/v_g(\omega_0)\big)\Big)$$

avec $k'(\omega_0) = k_0$. C'est-à-dire que le paquet d'onde total est le produit d'une OPPH « moyenne » de pulsation ω_0 se propageant à $\omega_0/k_0 = v_\varphi$ et d'une enveloppe constituée d'OPPH de pulsations beaucoup plus lentes $\omega - \omega_0 \ll \omega_0$ se propageant toutes à la célérité v_g.

Les conclusions sont alors les suivantes : pour une relation de dispersion faiblement dispersive, c'est-à-dire lorsqu'on peut limiter le développement à l'ordre 1, on observe que le paquet d'onde (schéma en figure 2) est tel que :

- son enveloppe se propage à une vitesse v_g différente de v_φ ;
- son enveloppe se propage **sans se déformer**.

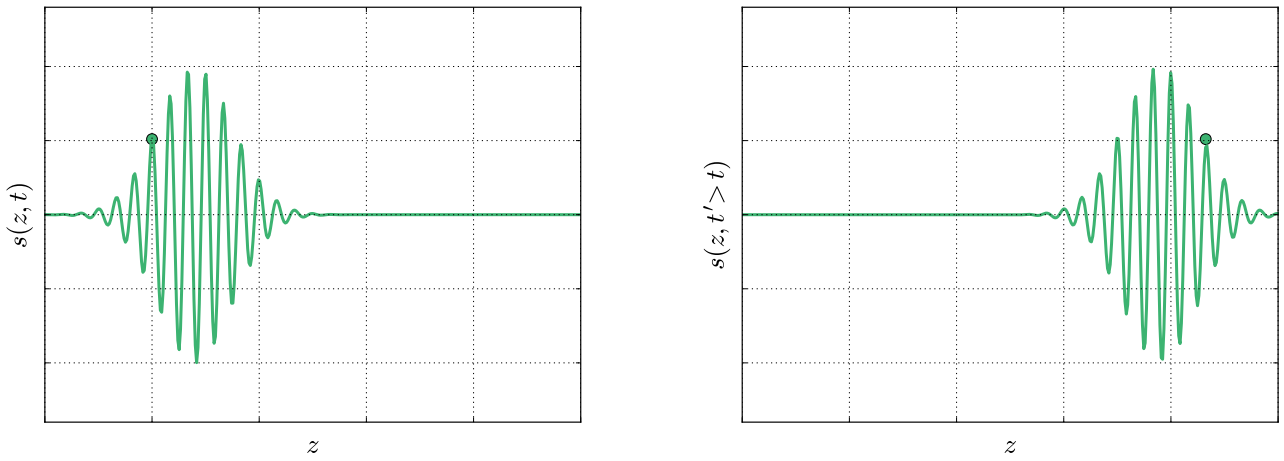

FIGURE 2 – **Propagation faiblement dispersive.** Paquet d'onde à t (à gauche) et à $t' > t$ (à droite). Le paquet d'onde conserve sa forme tout le long de la propagation, mais il se propage à la célérité $v_g \neq v_\varphi$.

3 Propagation plus dispersive

Ici on dépasse ce qui a été dit dans le cours, pour aborder un nouveau phénomène :

Lorsque la dispersion est importante, l'enveloppe du paquet d'onde se déforme au cours du temps.

Lorsque la dispersion est importante, on ne peut plus arrêter le développement limité de k à l'ordre 1 en $\omega - \omega_0$, et par conséquent il faut écrire à l'ordre 2

$$k'(\omega) \approx k'(\omega_0) + (\omega - \omega_0)\frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0) + \frac{(\omega-\omega_0)^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2k'}{\mathrm{d}\omega^2}(\omega_0)$$

Cela modifie l'expression de $\underline{s}(z,t)$. Sans rentrer dans les détails de calcul, on a l'idée intuitive suivante : si le développement limité ne s'arrête pas à l'ordre 1, alors dans l'exponentielle complexe du paquet d'onde on a

$$(\omega - \omega_0)\big(t - z/v_g + \text{ des termes qui dépendent de } \omega, z, \cdots\big)$$

et donc le paquet d'onde basse fréquence n'est plus une OPP. En conséquence le paquet d'onde total a tendance à se déformer. On parle généralement **d'étalement du paquet d'onde**, mais il faut garder à l'esprit que la déformation peut aussi être une contraction. Attention, cet étalement n'a rien à voir avec de l'absorption. Ce comportement est schématisé sur la figure 3.

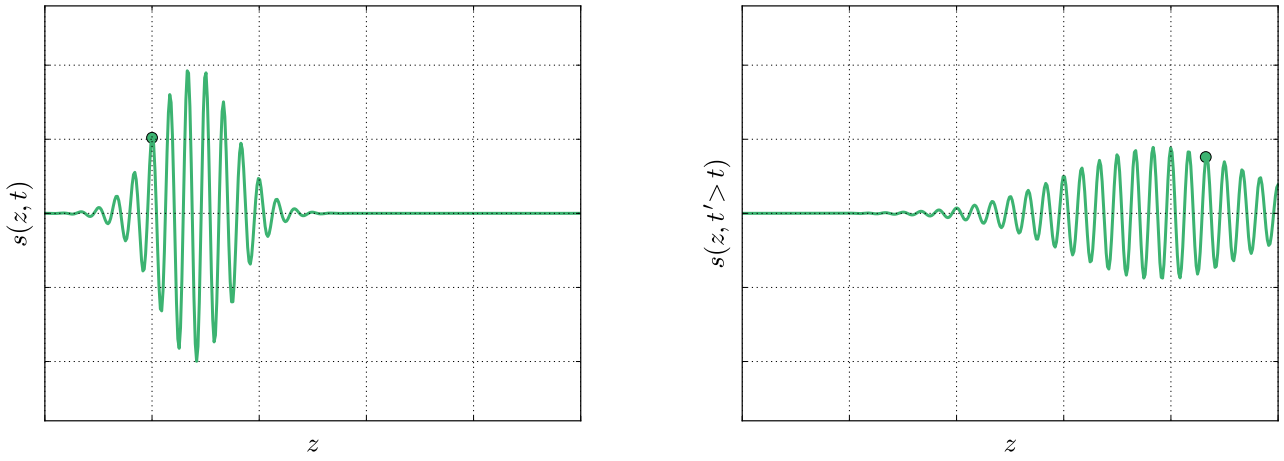

FIGURE 3 – **Propagation plus dispersive.** Paquet d'onde à t (à gauche) et à $t' > t$ (à droite). Le maximum du paquet d'onde voyage à la vitesse v_g mais le paquet se déforme pendant la propagation. On montre ici un étalement du paquet mais il peut aussi se contracter.

Évidemment, pour des dispersions encore plus importantes, il faut éventuellement pousser le développement limité à l'ordre 3, 4, ... et la propagation « en groupe » est de plus en plus complexe à décrire.