O 2/3 -TD

Ondes unidimensionnelles

O2 — 01 Corde de guitare

On étudie une corde de guitare de longueur $L = 1$ m et dont la fréquence du fondamental est 435 Hz.

1) Calculer la vitesse de phase.

2) La corde a un diamètre $d = 1$ mm et est en acier, de masse volumique $\rho = 7,9 \times 10^3$ kg· m^{-3}. En déduire la tension de la corde.

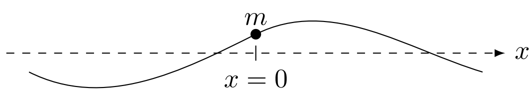
O2 — 02 Masselotte sur une corde

Une masse m ponctuelle est fixée à l'abscisse $x = 0$ sur une corde tendue . Une onde incidente (depuis les $x < 0$) progressive (vers les x croissants) sinusoïdale

$$\underline{y_i}(x,\,t) = A_i \exp\Big(\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,x)\Big)$$

donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise

$$\underline{y_r}(x,\,t) = \underline{A}_r \exp\Big(\mathrm{i}\,(\omega\,t + k\,x)\Big) \quad (\text{côté } x < 0) \qquad \text{et} \qquad \underline{y_t}(x,\,t) = \underline{A}_t \exp\Big(\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,x)\Big) \quad (\text{côté } x > 0)$$



1) Justifier la forme des ondes réfléchie et transmise.

2) Déterminer l'expression des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude

$$\underline{r} = \frac{\underline{A}_r}{A_i} \qquad \text{et} \qquad \underline{t} = \frac{\underline{A}_t}{A_i}$$

Pour cela, on traduira la continuité de la corde en $x = 0$ et on écrira le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse m. Pour simplifier l'approche, on prendra en compte l'inertie de la masse mais pas son poids.

O2 — 03 Frottements fluides sur une corde de Melde

On considère le dispositif de la corde de Melde. Visiblement à la résonance, l'amplitude ne devient pas infinie. La modélisation du cours n'est pas assez précise pour rendre compte de cela. On propose dans cet exercice de tenir compte des frottements fluides dans la modélisation de la dynamique de la corde. Toutes les autres hypothèses du cours restent identiques (masse linéïque μ, tension T).
On suppose qu'un élément de corde de longueur dx subit une force de frottement fluide $\overrightarrow{\mathrm{d}f} = -h\,\mathrm{d}x\,\vec{v}$, avec $\vec{v}$ la vitesse de cet élément et h un coefficient de frottement.

1) Trouver la nouvelle équation d'onde.

2) Obtenir la relation de dispersion pour cette équation d'onde.

On cherche une solution de cette équation d'onde sous la forme $y(x,\,t) = \mathrm{Re}\left(\underline{F}(x)\exp(\mathrm{i}\,\omega\,t)\right)$.

3) Établir l'équation vérifiée par $\underline{F}$.

4) On suppose que $h \ll \mu\,\omega$. Montrer qu'alors

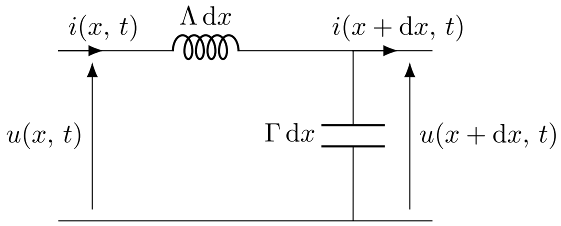
$$\underline{F}(x) \approx \underline{A}\exp(\alpha\,x)\exp(\mathrm{i}\,k\,x) + \underline{B}\exp(-\alpha\,x)\exp(-\mathrm{i}\,k\,x)$$

5) Les conditions aux limites sont $y(0,\,t) = Y_0\,\cos(\omega\,t)$ et $y(L,\,t) = 0$. En déduire $\underline{y}(x,\,t)$.

O2 — 04 Ligne coaxiale

(Onde de tension dans un câble coaxial, voir TP associé).

Une ligne coaxiale parfaite présente une capacité linéïque Γ et une inductance linéïque Λ. Un tronçon de longueur $\mathrm{d}x$ de cette ligne peut être modélisé par le schéma électrique ci-dessous.



Remarque : Afin d'éviter toute confusion, on précise que dans cet exercice l'intensité et la tension dépendent bien de la position sur la ligne : c'est une situation hors ARQS.

1) Établir les deux équations liant $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial i}{\partial t}$ ainsi que $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial i}{\partial x}$.

2) En déduire que u et i vérifient toutes les deux une équation de d'Alembert. Quelle est la célérité des ondes ?

3) On considère deux ondes progressives sinusoïdales de tension

$$\underline{u}^+(x,\,t) = \underline{U}^+ \exp\Big(\mathrm{j}\,(\omega\,t - k\,x)\Big) \qquad \text{et} \qquad \underline{u}^-(x,\,t) = \underline{U}^- \exp\Big(\mathrm{j}\,(\omega\,t + k\,x)\Big)$$

associées respectivement aux ondes de courant

$$\underline{i}^+(x,\,t) = \underline{I}^+ \exp\Big(\mathrm{j}\,(\omega\,t - k\,x)\Big) \qquad \text{et} \qquad \underline{i}^-(x,\,t) = \underline{I}^- \exp\Big(\mathrm{j}\,(\omega\,t + k\,x)\Big)$$

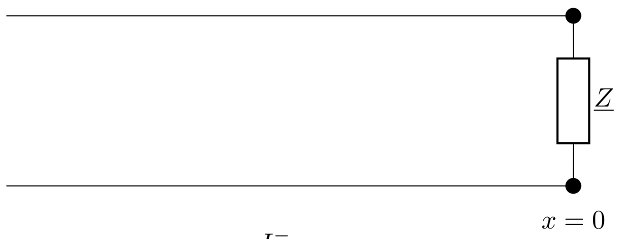
Quel est le lien entre $\underline{I}^+$ et $\underline{U}^+$ d'une part, et celui entre $\underline{I}^-$ et $\underline{U}^-$ d'autre part ? On notera $Zc = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}$.

4) La ligne coaxiale se termine à l'abscisse $x = 0$. Une onde de tension progressive sinusoïdale dans le sens des x croissants se propage le long de la ligne et est réfléchie en bout de ligne, si bien que la tension totale s'écrit

$$\underline{u}(x,\,t) = \underline{U}^+ \exp\Big(\mathrm{j}\,(\omega\,t - k\,x)\Big) + \underline{U}^- \exp\Big(\mathrm{j}\,(\omega\,t + k\,x)\Big)$$

Écrire l'onde de courant correspondante.

5) Au bout de la ligne (donc en $x = 0$), il y a une impédance $\underline{Z}$.



Calculer le coefficient de réflexion en intensité $\underline{r} = \dfrac{\underline{I}^-}{\underline{I}^+}$.

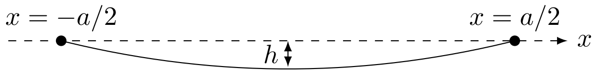
6) On étudie plusieurs cas. Si $\underline{Z}$ est un fil, la ligne est court-circuitée en $x = 0$. Que vaut alors le coefficient de réflexion ? Quelle forme prend l'onde de tension ? Et l'onde de courant ?

7) Même question si $\underline{Z}$ est un interrupteur ouvert.

8) Même question si $\underline{Z} = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}$. On parle dans ce dernier cas d'**adaptation d'impédance**.

O2 — 05 Corde pendante

Une corde inextensible et infiniment souple, de masse linéïque μ, est accrochée à ses deux extrémités, en $x = -a/2$ et en $x = a/2$. Par rapport au cours, on ne néglige plus l'action du poids, et on ne suppose plus les angles par rapport à l'horizontal petits. On cherche à savoir quelle forme prend la corde **au repos**.



1) Montrer que l'équation qui régit la forme de la corde est

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mu\, g}{T_0}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

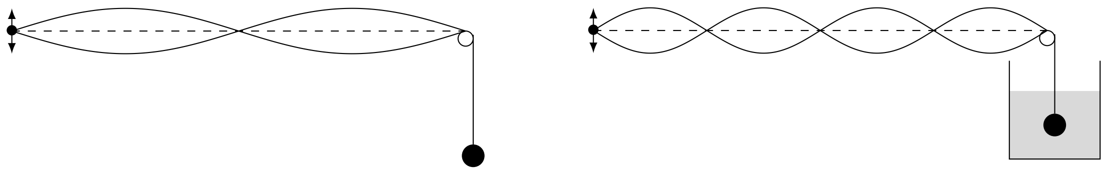
2) Résoudre cette équation en posant d'abord $u = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, puis en intégrant deux fois. Comment obtenir T_0 ?

3) Obtenir alors la hauteur h. En faire l'application numérique pour une corde de masse $m = 1,9$ g, de longueur $L = 63$ cm tendue par une tension $T_0 = 103$ N (guitare). Le fait de négliger le poids dans le cours vous paraît-il raisonnable ?

Données : une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ est argsh(u), où la fonction argsh(x) est la réciproque de la fonction sh(x).

O2 — 06 Ondes stationnaires (Résolution de problème) ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

On fait apparaître des vibrations sur une corde à l'aide d'un pot vibrant à ω, et dans un premier temps on observe le schéma de gauche.

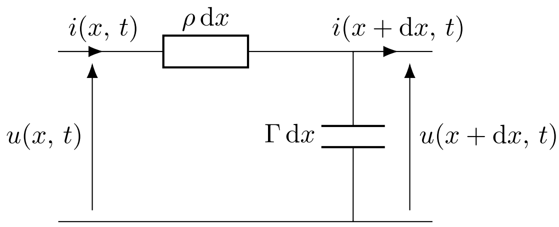


Dans un second temps, on immerge la sphère de masse m dans un récipient contenant de l'eau et on observe le schéma de droite.

1) Estimer le rayon de la sphère. La masse m fait 50 g.

O2 — 07 Ligne dissipative

Un élément de longueur $\mathrm{d}x$ d'une ligne bifilaire est modélisé par le schéma équivalent suivant.



1) Établir l'équation de propagation de l'onde de tension dans la ligne. Comment s'appelle-t-elle ? Donner les propriétés de cette équation.

2) Chercher des solutions stationnaires $(A\, \cos(k\, x) + B\, \sin(k\, x))\, \exp(-t/\tau)$ pour l'onde de tension. Quelle relation relie k et τ ? On considérera pour conditions aux limites deux court-circuits, en $x = 0$ et $x = L$. Comment appelle-t-on ces solutions ? Décrire leurs évolutions temporelles.

3) À l'instant $t = 0$, les condensateurs sont chargés avec une tension $v(x, t = 0) = 4\, A \sin^3(\pi\, x \,/\, L)$. Les conditions aux limites n'ont pas changé. Prévoir sans calcul l'état final de la ligne, puis déterminer $v(x, t)$.

O2 — 08 Absorbeur d'onde

Une corde vibrante de longueur L s'étend entre $x = 0$ et $x = L$. Un expérimentateur impose en $x = 0$ le déplacement $y(x = 0, t) = a\cos(\omega t)$. La corde est reliée en $x = L$ à un anneau de masse négligeable, susceptible de se déplacer seulement selon $\overrightarrow{e_y}$ et soumis à une force de frottement fluide $-h\,\vec{v}$.

1) Proposer la forme de l'onde incidente $\underline{y_i}$ et de l'onde réfléchie $\underline{y_r}$ en notation complexe.

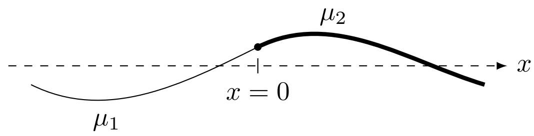
2) On pose le coefficent de réflexion

$$\underline{r} = \frac{\underline{y_r}(x = L, t)}{\underline{y_i}(x = L, t)}$$

Calculer $\underline{r}$ et montrer qu'une valeur de h permet d'annuler l'onde réfléchie. On a ainsi conçu un absorbeur d'ondes.

O2 — 12 Réflexion et transmission sur une discontinuité

Une corde très longue est composée de deux tronçons de masses linéïques μ_1 et μ_2. La tension est toujours T. Le noeud en $x = 0$ est sans masse.



Du côté des $x < 0$ arrive un ébranlement qu'on prendra sinusoïdal

$$\underline{y_i}(x, t) = \underline{y_{0i}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_1 x)}$$

La discontinuité de la corde donne lieu à une onde réfléchie et une onde transmise

$$\underline{y_r}(x, t) = \underline{y_{0r}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + k_1 x)} \quad \text{pour } x < 0 \qquad \text{et} \qquad \underline{y_t}(x, t) = \underline{y_{0t}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_2 x)} \quad \text{pour } x > 0$$

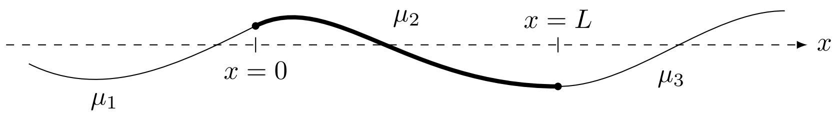
On définit les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude en $x = 0$ par

$$\underline{r} = \frac{\underline{y_r}(0, t)}{\underline{y_i}(0, t)} \qquad \text{et} \qquad \underline{t} = \frac{\underline{y_t}(0, t)}{\underline{y_i}(0, t)}$$

1) Donner les deux conditions aux limites que doivent vérifier les ébranlements $\underline{y_i}$, $\underline{y_r}$ et $\underline{y_t}$.

2) En déduire les expressions de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de $\alpha = \sqrt{\mu_2/\mu_1}$.

3) La corde est à présent constituée de trois morceaux de masses linéïques μ_1, μ_2 et μ_3. La même onde incidente arrive des $x < 0$. Proposer des expressions génériques des ondes résultantes sur les trois morceaux. On notera k_1, k_2 et k_3 les modules des vecteurs d'onde.



4) Sous quelles conditions sur k_1, k_2 et k_3 n'existe-t-il pas de réflexion sur le premier tronçon ?

O2 — 11 Corde à sauter

On considère une corde homogène, inextensible, infiniment souple, fixée à ses deux extrémités, et mise en rotation à la vitesse angulaire ω autour de l'axe qu'elle occupe au repos.

1) Obtenir l'équation régissant la forme de la corde à sauter. On supposera que la corde tourne suffisamment vite pour pouvoir négliger son poids.

L'équation ne s'intègre pas analytiquement, mais on peut, par exemple, écrire un script `python` la résolvant et tracer la solution.

O2 — 10 Étude des vibrations d'une corde verticale

L'axe (Ox) est vertical ascendant, (Oy) est horizontal. Une corde infiniment souple, de masse linéïque μ, de longueur L est suspendue au point A dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. Lorsque la corde est au repos, son extrémité inférieure coïncide avec le point O.

Son point d'accrochage A effectue des oscillations horizontales $y_A(t) = a\,\cos(\omega\,t)$, d'amplitude a très inférieure à L. L'extrémité inférieure ne subit aucune contrainte.

Le déplacement quasi horizontal du point d'ordonnée x de la corde par rapport à sa position d'équilibre est noté $y(x,\,t)$. Dans toute la suite, on suppose que y et ses dérivées sont très petits, et que le déplacement de la corde ne se produit que dans la direction (Oy).

1) Montrer que l'équation de propagation des ondes le long de la corde est :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g\left(\frac{\partial y}{\partial x} + x\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$$

2) Cette équation est une équation aux dérivées partielles linéaires, mais dont les coefficients ne sont pas constants (le « x » devant le dernier terme). Les OPPH ne sont dans ce cas pas solutions. Pour résoudre cette équation, on cherche une solution sous la forme

$$y(x,\,t) = A(x)\,\cos(\omega\,t) + B(x)\,\sin(\omega\,t)$$

Le choix de la dépendance temporelle harmonique à la pulsation ω provient du fait que la corde est excitée sinusoïdalement à ω. L'équation d'onde étant linéaire, il ne peut pas naître d'autres pulsations sur la corde. Trouver l'équation vérifiée par $A(x)$ et $B(x)$.

3) On peut résoudre l'équation sur $A(x)$ en cherchant $A(x)$ sous forme de série entière

$$A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k\,x^k$$

Obtenir une relation de récurrence sur les α_k, en déduire l'expression des α_k et donner les 3 premiers termes du développement en série entière de A, (α_1, α_2 et α_3) en fonction de α_0.

4) Obtenir $B(x)$ de manière identique. Comment peut-on déterminer les premiers coefficients α_0 et β_0 ?

O2 — 09 Excitation d'une corde par force magnétique

On étudie les petits mouvements dans la direction (Oz) d'une corde métallique conductrice de longueur L fixée en ses deux extrémités d'abscisses $x = 0$ et $x = L$. On néglige la pesanteur. La corde est traversée par un courant d'intensité $I = I_0\,\cos(\omega\,t)$ et est plongée dans un champ magnétique

$$\vec{B} = B_0\,\sin\left(\frac{\pi\,x}{L}\right)\,\vec{u_y}$$

1) Établir l'équation du mouvement de la corde.

2) On cherche les solutions en régime forcé sous la forme $z(x,\,t) = A(x)\,\cos(\omega\,t)$. Établir l'équation vérifiée par $A(x)$.

3) Obtenir explicitement $z(x,\,t)$ en cherchant la solution particulière $A_P(x)$ de l'équation sur $A(x)$ sous la forme

$$A_P(x) = \alpha\,\sin\left(\frac{\pi\,x}{L}\right)$$

4) Discuter la résonance.

O2 — 13 Shape of a rope

A helicopter is flying horizontally at constant speed. A perfectly flexible uniform cable is suspended beneath the helicopter. Air friction is not negligible.

1) What is the equation solved by the shape of the rope ?

2) We now add a mass M at the bottom of the rope. What are the new equations solved by its shape ?

Note. This exercise comes from a youtube video by Veritasium : `https://www.youtube.com/watch?v=q-_7y0WUnW4`.