

H2-TD

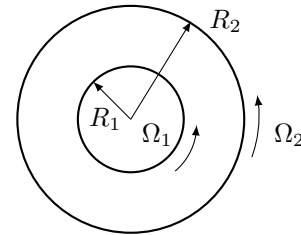
Dynamique des fluides visqueux newtoniens en écoulement incompressible

H2 – 01 Écoulement de Couette cylindrique



On considère deux cylindres coaxiaux d'axe (Oz) et de rayons R_1 et R_2 , en rotation uniforme aux vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2 . L'espace entre les cylindres est rempli par un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité η , en écoulement stationnaire tel que $\vec{v} = v(r) \vec{e}_\theta$. On néglige les effets de la gravité.

- 1) Montrer que $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r$.
- 2) Montrer que la pression P ne dépend que de r .
- 3) Montrer que $v(r) = Ar + \frac{B}{r}$ et établir les expressions de A et B .
- 4) Calculer $P(r)$ à une constante d'intégration près.



Données : On donne $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2$. Par ailleurs, dans le cadre de l'exercice on a

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{d(r v(r))}{dr} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \Delta \vec{v} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(r v(r))}{dr} \right) \vec{e}_\theta$$

H2 – 02 Écoulement de Poiseuille cylindrique

On considère un fluide incompressible de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ en écoulement stationnaire dans un cylindre d'axe (Oz) et de rayon R . On cherche un champ de vitesse et un champ de pression de la forme :

$$\vec{v} = v(r, z) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad P = P(r, z)$$

- 1) Montrer que v ne dépend pas de z .
- 2) On néglige la pesanteur. Dans un tel cas, on rappelle l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \vec{a} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v}$$

Montrer que $\vec{a} = \vec{0}$.

- 3) Montrer que P ne dépend pas de r . En déduire que $\frac{dP}{dz} = C$ avec C une constante.
- 4) On note $P(z=0) = P_1$ et $P(z=L) = P_2$. Expliciter $P(z)$ puis $v(r)$.
- 5) En déduire l'expression du débit volumique D_V en fonction de P_1 et P_2 .
- 6) Construire une analogie avec d'autres domaines de la physique pour obtenir une « résistance hydraulique » R_h . Exprimer R_h en fonction de η , R et L .

Données : Pour un tel champ de vitesse on a

$$\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \vec{e}_z$$

H2 – 03 Vaisseau sanguin

(Cet exercice est une application des résultats de l'exercice H2-02.)

- 1) Le modèle d'écoulement de Poiseuille s'applique bien à l'écoulement du sang dans les vaisseaux sanguins. Calculer la chute de pression dans une artère de longueur $L = 1$ m, de rayon $R = 0,5$ cm, où le débit volumique vaut $D_V = 80 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. La viscosité du sang est $\eta = 4 \times 10^{-3} \text{ Pl}$.
- 2) Cette artère a un défaut, elle est dilatée sur une longueur ℓ , de telle sorte que son rayon sur cette longueur est $R(1 + \varepsilon)$. Calculer la différence de pression entre le début et la fin de la zone dilatée.

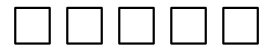
H2 – 04 Huile de graissage

(Cet exercice est une application des résultats de l'exercice H2-02.)

Une huile de graissage a une viscosité cinématique ν définie par $\nu = \eta/\rho$, avec η la viscosité dynamique et $\rho = 0,9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ la masse volumique. On a $\nu = 16 \times 10^{-6} \text{ SI}$. Cette huile passe dans un tube de diamètre $d = 10 \text{ mm}$ à la vitesse moyenne de $0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

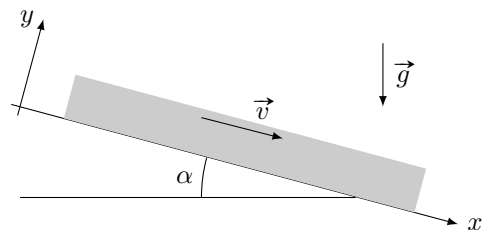
- 1) Quelle est l'unité de ν ? Comment est définie la vitesse moyenne?
- 2) Quel est le nombre de Reynolds? Caractériser l'écoulement.
- 3) Quelle est la perte de pression par mètre de conduite?
- 4) Quel est le débit volumique dans la conduite?
- 5) Cette même huile s'écoule le long d'un tuyau de longueur 3 m et de diamètre 10 mm. Elle doit arriver à l'extrémité du circuit avec à une vitesse de $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Répondre aux mêmes questions que précédemment.

H2 – 05 Écoulement le long d'un plan incliné



Une mince couche d'huile (viscosité $\eta = 1 \text{ Pl}$, masse volumique $\rho = 0,9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$), d'épaisseur e , coule le long d'un plan incliné. Le champ des vitesses est de la forme $\vec{v} = v(y) \vec{e}_x$. La pression de l'atmosphère est P_0 . On néglige les forces de viscosité sur l'interface air/huile.

- 1) Déterminer la forme de la fonction $v(y)$.
- 2) Déterminer, pour une largeur L selon z , la relation entre e et le débit massique D_m .
- 3) Calculer la vitesse maximale et le nombre de Reynolds pour $e = 1 \text{ mm}$ et $\alpha = 45^\circ$.
- 4) Peut-on appliquer ce modèle à une couche d'eau de même épaisseur?



Donnée : on utilisera comme condition aux limites sur la surface libre

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = e$$

(absence de contrainte de viscosité sur l'air).

H2 – 06 Viscosité d'un fluide

Un récipient cylindrique vertical, de diamètre $D = 5 \text{ cm}$, est terminé par un tube horizontal de diamètre $d = 1 \text{ mm}$ et de longueur $L = 40 \text{ cm}$. Un liquide visqueux et incompressible s'écoule lentement. Sa hauteur h passe de $5,0 \text{ cm}$ à $2,5 \text{ cm}$ en une heure et quart. On admet que le débit dans le tube suit la loi de Poiseuille

$$D_v = \frac{\pi d^4}{128 \eta} \frac{\Delta P}{L}$$

où ΔP est la différence de pression entre les deux extrémités du tube.

- 1) Déterminer la viscosité cinématique ν du liquide.

H2 – 07 Écoulement entre deux plans verticaux

On étudie l'écoulement d'un fluide visqueux (viscosité η , masse volumique $\mu = \text{cste}$) entre deux plans infinis suivant y , de hauteur L , et distants de h . Le fluide s'écoule de manière stationnaire. On recherche les champs de vitesse et de pression dans le fluide sous la forme

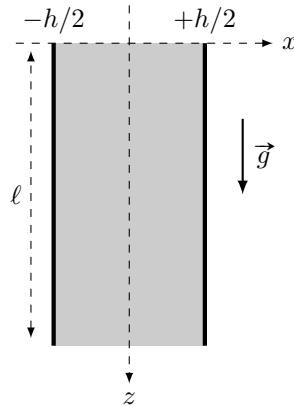
$$\vec{v} = v(x, z) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad P(x, z)$$

1) Justifier que l'écoulement est incompressible. En déduire une information sur le champ de vitesse. On peut alors utiliser l'équation de Navier-Stokes

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad} P + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}_{\text{ext}}$$

2) En déduire une information sur le champ de pression.

3) On suppose que la pression est identique en $z = 0$ et $z = \ell$, égale à P_0 . En déduire le champ de pression puis le champ de vitesse de l'écoulement.



H2 – 08 Mise en oscillation d'un fluide visqueux



On considère un « très grand » récipient, contenant un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η . La verticale est repérée par un axe z ascendant. On place un plateau solide de surface S (suffisamment grande pour pouvoir négliger les effets de bord) dans le plan $z = 0$. Un dispositif impose au plateau d'effectuer des oscillations horizontales : son mouvement est donc $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$.

1) On s'intéresse au champ des vitesses $\vec{v}(\vec{r}, t)$ dans le fluide. Pourquoi est-il raisonnable de supposer qu'il ne dépend que de z et de t ? Déduire que $v_z = 0$.

2) Justifier que $\vec{v} = v(z, t) \vec{e}_x$.

3) Déterminer le champ de pression à une constante près.

4) Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $v(z, t)$.

5) La résoudre en cherchant la solution sous forme complexe $\underline{v}(z, t) = \underline{V}(z) \exp(i\omega t)$. Expliquer l'analogie avec l'effet de peau dans un conducteur en électromagnétisme [Nécessite le chapitre 08].

6) Calculer la puissance fournie par le dispositif à la plaque.

Données : On rappelle l'équation de Navier-Stokes $\rho \vec{a} = \rho \vec{g} - \text{grad} P + \eta \Delta \vec{v}$

Encyclopédie des frottements fluides

À bas Reynolds ($\mathcal{R}_e \ll 10$), le coefficient de trainée $\mathcal{C}_x(\mathcal{R}_e)$ a un comportement en $1/\mathcal{R}_e$, ce qui traduit une force de trainée $\vec{F}$ proportionnelle à la vitesse v de l'objet par rapport au fluide.

$$\|\vec{F}\| = \frac{1}{2} \mathcal{C}_x \varrho S v^2 \quad \text{donne} \quad \|\vec{F}\| \propto v \quad \text{si} \quad \mathcal{C}_x(\mathcal{R}_e) \propto \frac{1}{\mathcal{R}_e}$$

H2 – 09 Chute dans le champ de pesanteur terrestre



On étudie dans cet exercice la chute d'une bille sphérique dans un fluide visqueux (huile, viscosité $\eta = 1 \text{ Pl}$, masse volumique $\varrho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) sous l'effet de la pesanteur. Dans ce cas, si on définit le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e$ de l'écoulement autour de la bille en considérant comme longueur typique le diamètre D de celle-ci, et comme vitesse typique de l'écoulement celle de la bille $\vec{v}$, on peut montrer que le coefficient de trainée s'écrit exactement

$$\mathcal{C}_x = \frac{24}{\mathcal{R}_e} \quad \text{pour} \quad \mathcal{R}_e < 10$$

- 1) Définir le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e$ de l'écoulement et le calculer pour $D = 2 \text{ mm}$ et $v = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.
- 2) En déduire que la force de trainée s'écrit

$$\vec{F} = -6\pi\eta R \vec{v} \quad (\text{appelée loi de Stokes})$$

où R est le rayon de la sphère.

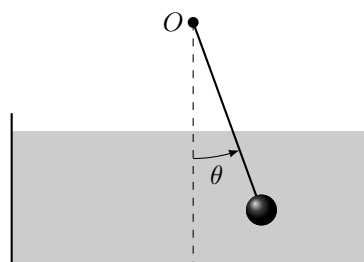
- 3) La bille est soumise à son poids (masse m), aux frottements fluides $\vec{F}$ et à la poussée d'Archimède. Elle est lâchée dans l'huile sans vitesse initiale et démarre une trajectoire le long de l'axe vertical z orienté vers le bas. Obtenir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de la bille.
- 4) En déduire la vitesse limite de la bille, ainsi que le temps typique τ d'évolution vers cette vitesse. On donne $\varrho_f = 7,8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ pour le fer. Faire les applications numériques pour une bille en fer de rayon $r = 1 \text{ mm}$.
- 5) En déduire un protocole pour obtenir la viscosité d'un fluide. Ce dispositif est régulièrement employé et porte le nom de « viscosimètre à bille ».
- 6) Résoudre explicitement l'équation différentielle pour déduire la vitesse de la bille en fonction du temps. En tracer une représentation graphique.

H2 – 10 Pendule dans un fluide visqueux



Une sphère de masse m et de rayon r est attachée à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur ℓ , dont l'autre extrémité est reliée à un point d'attache O fixe. Elle peut osciller dans un milieu liquide de viscosité η et subit alors une force de frottement fluide $\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v}$. La position de la sphère est repérée par l'angle $\theta(t)$ formé à l'instant t par le fil avec la verticale. On néglige la poussée d'Archimède devant les autres forces en jeu et on suppose que le fil reste constamment tendu au cours du mouvement.

- 1) Déterminer l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ au cours du mouvement.
- 2) Dans le cas d'oscillations de faible amplitude, exprimer la pseudo-pulsation Ω en fonction des données de l'énoncé.
- 3) En déduire l'expression de la viscosité η en fonction de la pseudo-période T , de la période propre T_0 (période en l'absence d'amortissement), et des données.



À haut Reynolds ($\mathcal{R}_e \gg 100$), le coefficient de trainée $\mathcal{C}_x(\mathcal{R}_e)$ est constant, ce qui traduit une force de trainée proportionnelle cette fois à v^2 .

$$\|\vec{F}\| = \frac{1}{2} \mathcal{C}_x \rho S v^2 \quad \text{donne} \quad \|\vec{F}\| \propto v^2 \quad \text{si} \quad \mathcal{C}_x(\mathcal{R}_e) = \text{Cste}$$

H2 – 11 Chute à haut Reynolds



On considère un point matériel de masse m , lâché sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur. Il démarre une trajectoire le long de l'axe vertical z (orienté vers le haut). Il est soumis à son poids et à une force de frottement fluide à haut Reynolds.

Pour contextualiser l'exercice, on peut penser à un parachutiste en phase de « chute libre » (c'est-à-dire lorsque le parachute n'a pas encore été ouvert) dans l'atmosphère.

- 1) Proposer un nombre de Reynolds pour l'écoulement autour du parachutiste et justifier qu'on doit considérer une force de frottement en v^2 . On prendra comme vitesse typique du parachutiste 200 km/h.
- 2) Obtenir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse du parachutiste.
- 3) Quelle est la vitesse limite atteinte par le parachutiste? Proposer une application numérique (on prendra $\mathcal{C}_x = 0,6$) et calculer de nouveau le nombre de Reynolds avec cette vitesse pour valider le choix de la forme des frottements fluides.
- 4) Résoudre l'équation différentielle par séparation des variables. Obtenir alors la vitesse du parachutiste en fonction du temps et tracer cette fonction. On rappelle qu'une primitive de

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{est} \quad F(x) = \operatorname{argth}(x)$$

avec argth la fonction réciproque de th la tangente hyperbolique.



Remarque : l'exercice H2-09 demande de résoudre une équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre à coefficients constants, H2-10 une équation différentielle ordinaire linéaire du deuxième ordre à coefficients constants et H2-11 une équation différentielle ordinaire du premier ordre quelconque par séparation des variables.

Ce sont les **trois seules** équations différentielles ordinaires à **savoir résoudre** en physique. Faites l'effort de les maîtriser parfaitement.