

H1-TD

Cinématique des fluides

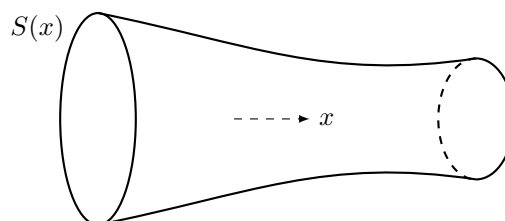
Dans ce TD les expressions des opérateurs différentiels ne sont pas données : elles se trouvent toutes dans le formulaire fourni en cours.

H1 – 01 Tube de section variable



Un fluide circule dans un tube de section variable $S(x)$. On suppose l'écoulement unidimensionnel : $\varrho = \varrho(x, t)$ et $\vec{v} = v(x, t) \vec{e}_x$.

- 1) Que pensez-vous de cette hypothèse?
- 2) Calculer les débits massique D_m et volumique D_V .
- 3) Quelles sont les propriétés des débits si : (a) l'écoulement est incompressible; (b) l'écoulement est stationnaire; (c) l'écoulement est à la fois incompressible et stationnaire?



H1 – 02 Champ des vitesses dans un dièdre



On considère un écoulement dans un dièdre, c'est-à-dire dans la région $x > 0, y > 0$ (limitée par des parois). Le champ des vitesses est

$$\vec{v} = k(-x \vec{e}_x + y \vec{e}_y)$$

où k est une constante.

- 1) Définir une ligne de courant. Comment peut-on les déterminer mathématiquement ? On peut calculer que les lignes de courant sont ici des hyperboles

$$y = \frac{K}{x} \quad \text{avec} \quad K \text{ une constante.}$$

En dessiner plusieurs et les orienter.

- 2) Calculer l'accélération $\vec{a}$ de deux manières.
- 3) Calculer $\text{div } \vec{v}$ et $\text{rot } \vec{v}$.
- 4) Caractériser l'écoulement.
- 5) Définir une ligne équipotentielle. Comment peut-on les déterminer mathématiquement ?

Données : On a $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 + \text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v}$.

H1 – 03 Écoulement potentiel



Un fluide en écoulement permanent et incompressible possède le potentiel des vitesses suivant (en coordonnées cylindriques) $\varphi = -A\theta + B \ln r$ avec A et B des constantes strictement positives.

- 1) Donner les composantes de la vitesse.
- 2) Vérifier que l'équation de conservation de la masse est bien satisfaite.

On étudie un **autre écoulement** défini par $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ avec $\varphi = a(x^2 - y^2)$ où x et y sont les coordonnées cartésiennes dans le plan et a une constante positive.

- 3) Déterminer le champ de vitesse.
- 4) Montrer que ce champ de vitesse décrit un écoulement incompressible.
- 5) Calculer l'accélération particulière $\frac{D\vec{v}}{Dt}$.

Données : On s'aidera du formulaire sur les opérateurs différentiels pour les premières questions.

H1 – 04 Oscillations d'une bulle



On considère une bulle d'air de centre O et de rayon R à l'intérieur d'un récipient (que l'on considérera de dimensions infinies) qui contient un fluide incompressible de masse volumique μ_0 . Cette bulle oscille de telle sorte que son rayon évolue suivant

$$R(t) = R_0 + \varepsilon \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad \varepsilon \ll R_0$$

Déterminer le champ de vitesse $\vec{v}$ dans tout l'espace, sachant que la vitesse des particules de fluide au contact de la bulle est égale à la vitesse de la paroi de la bulle.

H1 – 05 Écoulement tourbillonnaire : tornade



On considère l'écoulement orthoradial $\vec{v} = v(r) \vec{e}_\theta$, appelé **tourbillon** (ou vortex) **de Rankine**, tel que

- pour $r < a$, $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \gamma \vec{e}_z$;
- pour $r > a$, $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$.

- 1) Quelle est la forme géométrique des lignes de courant ?
- 2) Calculer la circulation du vecteur vitesse sur une ligne de courant.
- 3) En utilisant le théorème de Stokes, la relier à γ .
- 4) En déduire l'expression de la vitesse en tout point de l'espace. Tracer $v_\theta(r)$.

Conclusion : On remarquera que dans la zone $r > a$ le champ de vitesse tourne mais $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$. Les particules de fluide sont en fait en translation circulaire et non en rotation.

H1 – 06 Un n -ième écoulement

Dans le demi-espace $y > 0$, un fluide est caractérisé par un champ de vitesse en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v} = a e^{-ky} \cos(\omega t - ky) \vec{e}_x$$

- 1) Le champ de vitesse est-il stationnaire? incompressible? irrotationnel? Quelle est la forme des lignes de courant ?

H1 – 07 Un $n + 1$ -ième écoulement

Un fluide s'écoule entre deux cylindres coaxiaux d'axe (Oz) , de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. Les cylindres tournent à des vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2 . En coordonnées cylindriques, le champ de vitesse s'écrit

$$\vec{v} = \left(A r + \frac{B}{r} \right) \vec{e}_\theta$$

- 1) Le champ de vitesse est-il stationnaire? incompressible? irrotationnel? Quelle est la forme des lignes de courant ?
- 2) Le fluide est visqueux donc ne glisse pas sur les parois (ce qu'on discutera dans le chapitre H2). En déduire les constantes A et B .
- 3) Existe-t-il un potentiel des vitesses ?

H1 – 08 Écoulement entre deux plaques

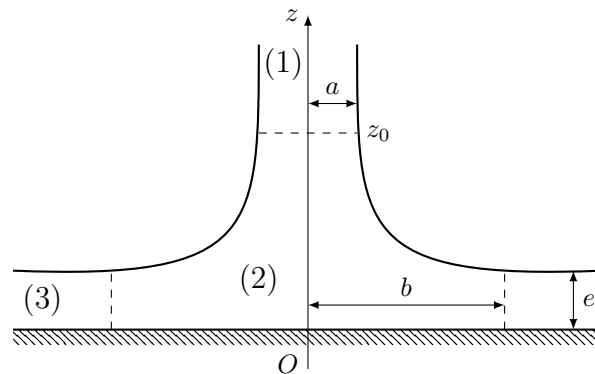
De l'air s'écoule dans une canalisation à symétrie cylindrique d'axe (Oz) , constituée d'un disque inférieur de centre O et de rayon R , et d'un disque supérieur identique, de cote e , percé d'un trou et raccordé à un tuyau vertical de rayon a et d'axe (Oz) . L'écoulement est supposé parfait, stationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène de masse volumique μ . On adopte un système de coordonnées cylindriques. On cherche un champ des vitesses dans les trois zones (1), (2) et (3) sous la forme

$$\vec{v}_1 = -v_0 \vec{u}_z, \quad \vec{v}_2 = A r \vec{u}_r + B z \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = v(r, z) \vec{u}_r$$

On rappelle l'expression de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques pour un champ de la forme $\vec{v} = v_r(r, z) \vec{u}_r + v_z(r, z) \vec{u}_z$:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{v} = \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta$$

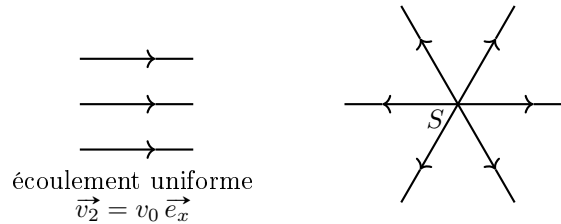
- 1) Exprimer le débit volumique à travers une section $z = \text{Cste}$ de la canalisation orientée dans le sens du courant dans la zone (1) en fonction de v_0 et a .
- 2) On s'intéresse à l'écoulement dans la zone (3). Montrer que $v_r(r, z)$ est indépendant de z .
- 3) Exprimer le débit volumique D_v à travers une section $r = \text{Cste}$ de l'écoulement en fonction de e , $v_r(r)$ et r . En déduire l'expression de $v_r(r)$ en fonction de r , e , a et v_0 .
- 4) On s'intéresse à l'écoulement dans la zone (2). Exprimer B en fonction de v_0 et z_0 , puis A en fonction de a , b , e et v_0 .
- 5) Établir par ailleurs une relation entre A et B , et en déduire une expression de b en fonction de z_0 , a et e .



H1 – 09 Source de fluide

Une source S ponctuelle tridimensionnelle située en O , origine du système de coordonnées sphériques, émet un fluide incompressible dans toutes les directions de l'espace, de manière isotrope, avec un débit volumique D_v constant.

- 1) Déterminer le champ de vitesse $\vec{v}_1$ associé à cet écoulement.
- 2) L'écoulement est-il stationnaire? Existe-t-il un potentiel des vitesses? Est-il incompressible?
- 3) On superpose à l'écoulement précédent un écoulement uniforme de la forme $\vec{v}_2 = v_0 \vec{e}_x$. Déterminer le champ de vitesse résultant.
- 4) Ce champ de vitesse est-il incompressible? irrotationnel?
- 5) Montrer qu'il existe un point d'arrêt (point de vitesse nulle).



H1 – 10 Écoulement potentiel 2

On étudie l'écoulement E irrotationnel et permanent d'un fluide incompressible (de masse volumique μ) autour d'un cylindre d'axe (Oz) et de rayon R , qui tourne autour de (Oz) à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$. Le fluide a, très loin du cylindre, la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ de direction perpendiculaire à (Oz) . Un point M dans le fluide sera repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

L'écoulement E peut être considéré comme la superposition de deux écoulements :

- E_1 , de potentiel des vitesses

$$\varphi_1 = - \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) r v_0 \cos \theta$$

correspondant à l'écoulement qu'on observerait si le cylindre ne tournait pas sur lui-même ;

- E_2 , de potentiel des vitesses

$$\varphi_2 = -k \theta$$

correspondant à l'écoulement qu'on observerait si le fluide était au repos ($v_0 = 0$).

- 1) Vérifier que E est un écoulement potentiel.
- 2) Obtenir le champ des vitesses $\vec{v}$ dans le fluide.
- 3) Calculer la circulation du champ de vitesse le long d'un cercle entourant le cylindre, de deux manières différentes, pour déduire une relation entre R , v_0 et k .
- 4) Déterminer, suivant la valeur de $a = k/(Rv_0)$, le nombre de points d'arrêt (point de vitesse nulle) dans l'écoulement.