

Équations de Maxwell

La physique admet l'existence de quatre interactions fondamentales :

- la gravitation (qui régit le mouvement des planètes, des galaxies... et le poids au quotidien) ;
- les deux interactions forte et faible (qui régissent la structure et la stabilité des noyaux atomiques) ;
- et l'électromagnétisme, qui régit **tout le reste !** La cohésion des matériaux, l'électronique, l'optique, l'induction, les ondes EM (radio, portable, wifi, X,...), toute la chimie et par extension la biologie... tout cela est inscrit dans les équations de Maxwell.

Historiquement : travaux de Faraday, Gauss, Ampère et bien d'autres, puis Maxwell en fait une synthèse en 1864, en ajoutant un terme. Maxwell prédit avec ce terme essentiel l'existence des ondes radio qui seront observées par Hertz en 1888.

Les équations de Maxwell présentent néanmoins une limite : le photon (aspect quantique de l'électromagnétisme). Dans le cadre du programme, elles ne décrivent que l'électromagnétisme classique (et l'EM quantique est largement hors programme).

1 Les quatres équations de Maxwell

1.1 Énoncé

Le champ électromagnétique est défini par la force de Lorentz que subit une particule de charge q et de vitesse \vec{v}

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

Le champ électromagnétique est régi par les quatre équations de Maxwell

Équation de Maxwell-Flux

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Équation de Maxwell-Gauss

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Équation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Équation de Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

avec ρ la densité volumique de charge et \vec{j} la densité surfacique de courant.

1.2 Discussion

- Les équations de Maxwell sont linéaires : on a donc le théorème de superposition pour les champs et on peut également écrire les équations (voir chapitre O6) en notation complexe.
- Les équations de Maxwell se lisent de droite à gauche : « les conséquences à gauche = les causes à droite ».
- **Équation de Maxwell-Flux** (parfois appelée équation de Maxwell-Thomson) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$: **1**) il n'existe pas de monopôle magnétique et **2**) les lignes de champ \vec{B} sont toujours fermées.
- **Équation de Maxwell-Gauss** $\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$: **1**) les charges électriques ρ créent des champs électriques \vec{E} .
- **Équation de Maxwell-Faraday** $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$: **1**) un champ magnétique qui varie dans le temps crée un champ électrique. C'est le phénomène d'induction! **2**) Cette équation change par rapport au cas de la statique. Dans le cas général, $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} \neq \vec{0}$ donc $\vec{E} \neq -\operatorname{grad} V$. Le champ \vec{E} n'est pas à circulation conservative dans le cas général. **3**)

On peut commenter que les équations de Maxwell sont bien cohérentes entre elles :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}) &= 0 && \text{(toujours)} \\
 &= \operatorname{div}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) && \text{(par Maxwell-Faraday)} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} && \text{(par commutation des opérateurs différentiels)} \\
 &= 0 && \text{(par Maxwell-Flux)}
 \end{aligned}$$

► **Équation de Maxwell-Ampère** $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$: **1)** Les courants électriques créent des champs magnétiques. **2)** Un champ électrique qui dépend du temps crée un champ magnétique (et ça on ne le savait pas avant !). **3)** Cette équation change également par rapport à la statique.

► Les équations de Maxwell se réunissent en deux groupes :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

qui sont indépendantes du milieu (des charges ρ et des courants \vec{j}). On les appelle **équations de structure**. Les deux autres

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

explicitent les interactions entre les champs \vec{E} et \vec{B} et le milieu ρ et \vec{j} .

► Par ailleurs, les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

relient directement \vec{E} et \vec{B} : il y a un **couplage spatio-temporel** de \vec{E} et \vec{B} . Il n'y a donc pas un champ électrique \vec{E} d'une part et un champ magnétique \vec{B} d'autre part, mais un champ électromagnétique (\vec{E} , \vec{B}) : l'un de vit pas sans l'autre !

► **Le cas de la statique.** Si les champs ne dépendent pas du temps (cas stationnaire) alors on a d'une part

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = \vec{0}$$

qui correspond à l'électrostatique (cf chapitre EM1), et d'autre part

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

qui correspond à la magnétostatique (cf chapitre EM4). On observe ainsi qu'**en statique, les champs \vec{E} et \vec{B} sont complètement découplés.**

► **Apport de Maxwell.** Le terme ajouté par Maxwell est $\mu_0 \varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ dans l'équation de Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Cet apport est essentiel : il permet d'assurer théoriquement la conservation de la charge et prédit l'existence des ondes électromagnétiques (voir chapitre O6).

► Pour finir : la force de Lorentz et les quatre équations de Maxwell sont les cinq équations fondamentales de la physique (elles ne se démontrent pas) qui dictent tous les phénomènes électromagnétiques.