

DS 4 Physique – PC 2021/2022

Vendredi 14/01/2021. Durée 4h. Calculatrice autorisée.

Pensez à utiliser les 20 à 30 dernières minutes qui vous sont allouées pour relire votre copie, avec le double objectif de la débarrasser des coquilles (oubli de flèches sur les vecteurs, erreurs de calculs, inhomogénéités,...) et de la rendre jolie (encadrez vos résultats, soulignez dans les phrases les mots importants, numérotez vos copies,...).

Problème 1 – CCP PSI 2011

Données. Question 9). Un élément de volume en géométrie cylindrique s'écrit $dV = 2\pi r dr dz$, où il faut intégrer sur r et sur z (l'intégration sur θ est déjà faite).

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs, de même longueur l , l'un entourant l'autre. L'un est un conducteur massif de rayon R_1 , appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3 , appelé la gaine du conducteur. L'espace inter-conducteur comporte un isolant.

On a : $R_1 = 0,25$ mm, $R_2 = 1,25$ mm et $l = 100$ m.

I] Modélisation :

Dans la mesure où les champs électromagnétiques ne pénètrent pas dans les conducteurs parfaits, on assimilera le câble coaxial à deux surfaces parfaitement conductrices, cylindriques, coaxiales. Le conducteur (1) a un rayon R_1 , le conducteur (2) a un rayon R_2 (figure 1). Ces deux conducteurs ont même longueur l . Vu que $l \gg R_2$, on négligera les effets de bord. L'espace entre les conducteurs sera assimilé au vide sauf explicitation contraire.

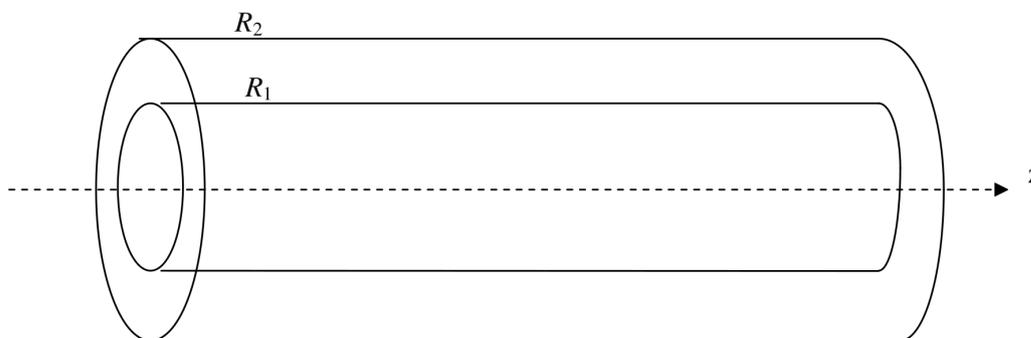


Figure 1 : Portion de câble

On note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ la base en coordonnées cylindriques.

Aucune connaissance particulière n'est requise pour la détermination de la capacité linéique et de l'inductance linéique du câble.

A] Capacité linéique C :

On suppose ici que les conducteurs intérieur et extérieur portent les charges électrostatiques respectives Q et $-Q$. Elles sont uniformément réparties en surface.

- 1) Justifier par des arguments d'invariance et de symétrie que $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ dans l'espace inter-conducteur.

- 2) Pour $R_1 < r < R_2$, en utilisant le théorème de Gauss sur une surface que l'on précisera, exprimer $E(r)$ en fonction de l, r, Q et ϵ_0 .
- 3) Les conducteurs (1) et (2) sont portés aux potentiels respectifs V_1 et V_2 , constants. Par un calcul de circulation, exprimer $V_1 - V_2$ en fonction de Q, l, R_1, R_2 et ϵ_0 .
- 4) On définit la capacité C_l du câble de longueur l par $C_l = \frac{Q}{V_1 - V_2}$. Exprimer C_l en fonction de l, R_1, R_2 et ϵ_0 , puis la capacité linéique C du câble coaxial en fonction de R_1, R_2 et ϵ_0 .
- 5) En pratique, l'espace inter-conducteur n'est pas du vide, mais comporte un isolant de permittivité relative $\epsilon_r = 3,1$. On a alors $C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$.

Déterminer la valeur numérique de C .

B] Inductance linéique L :

On suppose ici que le câble coaxial est alimenté par un générateur de courant continu. Le conducteur intérieur assure le transport du courant aller I_0 , le conducteur extérieur assure le transport du courant retour $-I_0$.

Les répartitions de ces courants sont superficielles et uniformes sur chaque conducteur. Pour le conducteur (1), on a une densité surfacique de courant : $\vec{j}_{s_1} = \frac{I_0}{2\pi R_1} \vec{u}_z$. On note : \vec{j}_{s_2} la densité surfacique de courant sur le conducteur (2).

- 6) Préciser l'expression et l'unité de \vec{j}_{s_2} .
- 7) Il existe entre les deux conducteurs un champ magnétique \vec{B} . Par des arguments d'invariance et de symétrie, justifier que $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$.
- 8) Pour $R_1 < r < R_2$, par application du théorème d'Ampère sur un parcours que l'on précisera, exprimer $B(r)$ en fonction I_0, r et μ_0 .
- 9) On note : $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$, la densité volumique d'énergie magnétique. Par intégration sur le volume inter-conducteur, exprimer l'énergie magnétique W_m du câble coaxial en fonction de I_0, μ_0, R_1, R_2 et l .
- 10) On rappelle que $W_m = \frac{L_l I_0^2}{2}$. Exprimer l'inductance L_l du câble de longueur l , en fonction de μ_0, R_1, R_2 et de l .
- 11) En déduire l'inductance linéique L du câble coaxial en fonction de μ_0, R_1, R_2 . Déterminer la valeur numérique de L .

Problème 2 – CCP PC 2021

Données. Question 3). On donne le gradient en sphérique

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Le gecko est un petit lézard capable de se déplacer à des vitesses de plusieurs mètres par seconde sur les murs ou les plafonds de pratiquement toutes natures, dans presque toutes les conditions. Des expériences menées en 2002 par l'équipe de l'américain Kellar Autumn ont montré que la spectaculaire faculté d'adhésion de l'animal est uniquement due à des forces de Van der Waals. L'adhésion est possible grâce à l'anatomie particulière des coussinets des doigts du lézard. Ces derniers sont recouverts de poils microscopiques, les sétules, ramifiés en des centaines de branches terminées par une spatule pouvant s'approcher à quelques nanomètres de la surface de contact.

I.1 - Interactions entre molécules polaires

On considère une molécule polaire située dans le vide, modélisée par un dipôle électrique rigide de moment dipolaire électrique permanent $\vec{p}_1 = p_1 \vec{u}_z$. Le dipôle, centré en un point O , est constitué de deux charges ponctuelles opposées, $+q$ et $-q$ (avec $q > 0$), situées sur l'axe (O, \vec{u}_z) aux points respectifs P et N distants de $a = PN$ (**figure 1**). On repère tout point M de l'espace par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

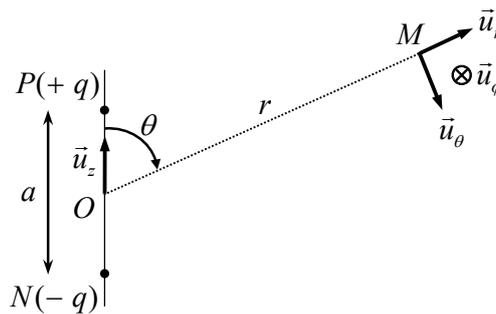


Figure 1 - Dipôle électrique centré en un point O

- Q1.** Expliquer, en prenant l'exemple de la molécule de chlorure d'hydrogène (HCl), l'origine du moment dipolaire permanent de certaines molécules. Donner l'expression en fonction de a et q du moment dipolaire électrique \vec{p}_1 de la molécule polaire.
- Q2.** Établir l'expression du potentiel électrostatique $V_1(M)$ créé en M par la molécule polaire dans le cadre de l'approximation dipolaire qu'on explicitera. On donnera le résultat en fonction de p_1 , ϵ_0 et des coordonnées sphériques du point M .
- Q3.** En déduire que le champ électrostatique $\vec{E}_1(M)$ créé en M par la molécule polaire s'écrit en coordonnées sphériques : $\vec{E}_1(M) = \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta)$.

Une seconde molécule polaire, modélisée par un dipôle rigide de moment dipolaire électrique permanent \vec{p}_2 , est située au point M sur l'axe (O, \vec{u}_z) tel que $\theta = 0$, à la distance r fixe du point O . À un instant donné, son moment dipolaire forme un angle α avec cet axe (**figure 2**). Dans ces conditions, la molécule plongée dans le champ électrostatique dû à l'autre molécule située au point O subit un couple de forces de moment : $\vec{\Gamma} = \vec{p}_2 \wedge \vec{E}_1(M)$. On rappelle l'expression de l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules : $\mathcal{E}_{12} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(M)$.

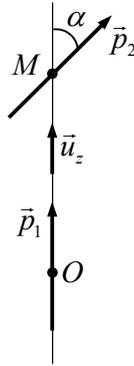


Figure 2 - Interaction entre deux molécules polaires

Q4. Quel est l'effet du couple de forces subi par la molécule fixée au point M ? Justifier l'orientation de son moment dipolaire électrique lorsqu'elle est en équilibre stable.

Les deux molécules sont supposées identiques, de moments dipolaires électriques de même valeur $p_1 = p_2 = p = 1 \text{ D}$.

Q5. Estimer l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules, distantes de $r = 0,5 \text{ nm}$, en supposant leurs moments dipolaires électriques alignés. Comparer cette énergie à l'énergie d'agitation thermique qui est de l'ordre de $k_B T$ où k_B est la constante de Boltzmann, à la température ambiante $T = 293 \text{ K}$. Conclure.

Q6. Du fait de l'agitation thermique, on doit considérer l'énergie potentielle d'interaction moyenne entre deux dipôles situés à une distance r dont les orientations relatives sont sujettes à des variations aléatoires. À température suffisamment élevée, on montre que cette énergie potentielle d'interaction moyenne est de la forme : $\langle \mathcal{E}_{12} \rangle = -\frac{C_K}{r^6}$ où

$$C_K = \frac{1}{k_B T} \left(\frac{p^2}{2\pi\epsilon_0} \right)^2.$$

Donner un ordre de grandeur de C_K à la température ambiante $T = 293 \text{ K}$. Vérifier que la force $\vec{F}_{1/2}$ qui dérive de cette énergie potentielle est attractive. On rappelle que $\vec{F}_{1/2} = -\overrightarrow{\text{grad}} \langle \mathcal{E}_{12} \rangle$.

I.2 - Calcul de la force d'adhérence du gecko au plafond

La force, calculée à la question précédente, correspond à une interaction de Van der Waals entre molécules polaires. Si on considère maintenant deux plans infinis parallèles, distants de D et séparant chacun un milieu solide (**figure 3**), on montre en prenant en compte l'ensemble des interactions de Van der Waals que la force surfacique entre les deux milieux s'écrit : $f(D) = \frac{A}{6\pi D^3}$.

La constante A , appelée constante de Hamaker, dépend de la nature des interactions de Van der Waals et des densités moléculaires des deux solides en interaction.

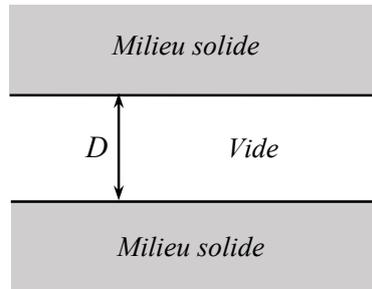


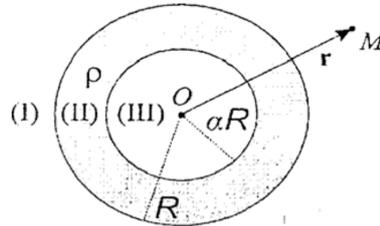
Figure 3 - Deux milieux plans infinis en interaction

- Q7.** Vérifier que la constante de Hamaker A est homogène à une énergie.
- Q8.** Un gecko de masse $m = 50$ g est suspendu par ses quatre pattes au plafond. Le gecko possède au total 6 millions de sétules, comportant chacune en moyenne 500 spatules. En modélisant une spatule par une surface carrée de $0,2 \mu\text{m}$ de côté située à une distance $D = 1$ nm du plafond, estimer le pourcentage de sétules utilisées par le gecko pour soutenir sa masse. On prendra $A = 10^{-19}$ J et on négligera tout effet de bord.
- Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a constaté qu'un gecko de 50 g utilise à son maximum d'adhérence uniquement 0,04 % de ses sétules pour soutenir sa masse, peut-on bien imputer les facultés d'adhérence du gecko aux interactions de Van der Waals ? Pourquoi le gecko mobilise-t-il certainement davantage de sétules pour assurer son adhérence ?
- Q9.** À un instant pris pour origine, on suppose que le gecko lâche le plafond et chute de 10 cm avant de se rattraper à l'aide d'une patte à une surface verticale. Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a pu mesurer une force de cisaillement (opposée au glissement) de l'ordre de 10 N par patte, estimer la distance que doit parcourir le gecko lorsque sa patte est en contact avec le mur pour s'arrêter. On supposera qu'il mobilise 50 % de la capacité de cisaillement maximale de sa patte.

Cette question fait appel à une démarche de résolution de problème. Il est notamment attendu de préciser chaque notation introduite, de présenter de façon claire les hypothèses retenues, de mener de bout en bout un calcul littéral, puis d'effectuer l'application numérique attendue.

Problème 3 – ENAC EPL 2009

13. Une sphère creuse (S), de centre O , de rayon extérieur R et, de rayon intérieur αR , ($\alpha < 1$), est électriquement chargée en volume, avec une charge volumique uniforme ρ (cf. figure ci-après). On repère un point M de l'espace par son vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ où $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\vec{e}_r = \overrightarrow{OM}/r$. ϵ_0 désigne la permittivité du vide.



Calculer le champ électrostatique $E_r(r)$ produit par S dans la région (I) définie par $r > R$:

14. Exprimer le champ électrostatique $E_{II}(r)$ produit par S dans la région (II) définie par $\alpha R < r < R$:

15. En déduire le potentiel électrostatique $V_I(r)$ de la région (I) en choisissant son origine à l'infini :

16. Quelle est l'expression du potentiel électrostatique $V_{III}(r)$ de la région (III) définie par $r < \alpha R$:

17. Lorsque $1 - \alpha \ll 1$, (S) devient une coquille sphérique de faible épaisseur, que l'on assimile à une sphère de rayon R , uniformément chargée en surface, de charge surfacique σ . Exprimer σ :

18. Dans l'hypothèse de la question précédente $1 - \alpha \ll 1$, déterminer la différence de potentiel $U = V_I(R) - V_{III}(0)$

A / Condensateur plan à symétrie de révolution

On considère le condensateur plan de la figure suivante.

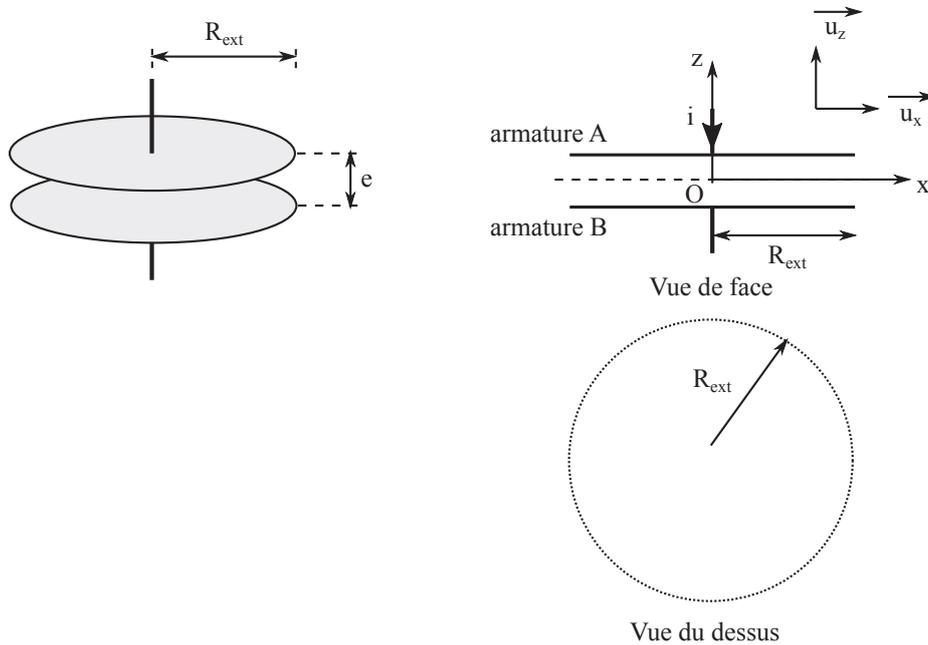


FIGURE 1 – Condensateur plan à symétrie de révolution

Ses armatures sont des disques conducteurs de rayon R_{ext} séparés par un diélectrique de permittivité relative ϵ_r et d'épaisseur e . **D'un point de vue électrique, le diélectrique se comporte comme le vide à condition de remplacer la permittivité du vide ϵ_0 par la permittivité du milieu $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ dans les formules utilisées.**

Les armatures A et B sont soumises respectivement à un potentiel électrique \mathcal{V}_A et \mathcal{V}_B . On note Q_A la charge électrique de l'armature A et $Q_B = -Q_A$ celle de l'armature B.

On suppose que le champ électrique $\vec{E}(M)$ est orienté selon l'axe \vec{u}_z et qu'il est uniforme à l'intérieur du diélectrique.

Les armatures étant d'épaisseur négligeable, elles seront donc considérées confondues avec les plans d'équation $z = -\frac{e}{2}$ et $z = +\frac{e}{2}$. On adoptera un modèle de plan uniformément chargé en surface pour les décrire.

A1. Justifier très simplement que les armatures d'un condensateur ont des charges électriques de signes opposés.

A2. Donner une condition sur R_{ext} et e permettant d'assimiler les armatures à deux plans infinis.

On s'intéresse dans un premier temps uniquement à l'armature supérieure, supposée seule et dans le vide.

A3. Justifier avec soin que le champ électrique créé en tout point par cette armature peut s'écrire $\vec{E}_A(M) = E_A(z) \vec{u}_z$.

A4. On pose $z' = z - \frac{e}{2}$. Exprimer $E_A(-z')$ en fonction de $E_A(z')$. On justifiera la réponse.

A5. En utilisant le théorème de Gauss, établir alors l'expression du champ électrique créé en tout point de l'espace

On considère maintenant l'ensemble des deux armatures séparées par le diélectrique de permittivité ϵ .

A6. Donner l'expression du champ électrique créé en tout point de l'espace par cette distribution. On distinguera trois zones de l'espace.

A7. Donner l'expression du potentiel électrostatique $\mathcal{V}(z)$ à l'intérieur du diélectrique en fonction de R_{ext} , Q_A et z . On prendra comme référence des potentiels électriques $\mathcal{V}(z=0)=0$.

A8. Montrer alors que la capacité C de ce condensateur est donnée par la formule :

$$C = \epsilon \frac{\pi \cdot R_{ext}^2}{e}$$

On suppose le condensateur initialement déchargé et que l'on soumet à une différence de potentiel $U = \mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B$.

On souhaite réaliser un condensateur avec un diélectrique composé de polypropylène de permittivité relative $\epsilon_r = 2,2$. Afin d'éviter un claquage (destruction du diélectrique suite à l'application d'un champ électrique trop important), on se restreint à un champ électrique $E_{max} = 70 \text{ MV.m}^{-1}$.

A11. Quelle doit être l'épaisseur e du diélectrique pour une différence de potentiel $U_{max} = 350 \text{ V}$?

A12. Quel doit être le rayon R_{ext} du condensateur pour une capacité $C = 1,0 \mu\text{F}$? Commenter brièvement le résultat obtenu.

B / Mesure de la capacité d'un condensateur

On souhaite dans cette partie mesurer expérimentalement la capacité C d'un condensateur. Une méthode consiste à soumettre le dipôle { condensateur de capacité C + conducteur ohmique de résistance R } série à un échelon de tension et d'analyser la réponse temporelle de ce dipôle à cette excitation. Le condensateur est initialement déchargé et le conducteur ohmique a pour résistance $R = 1,00 \pm 0,01 \text{ k}\Omega$.

À l'instant de date $t = 0$, le dipôle (RC) est soumis à une tension constante E . Un système d'acquisition permet d'enregistrer tous les $\Delta t = 0,10 \text{ ms}$ la tension u_C aux bornes du condensateur.

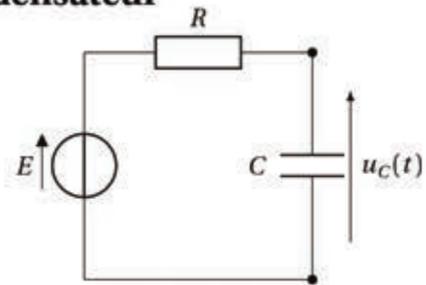


FIGURE 2 – Circuit d'étude

On obtient le graphe $u_{C,exp} = f(t)$ suivant. La courbe de réponse obtenue permet raisonnablement de suggérer un comportement du premier ordre.

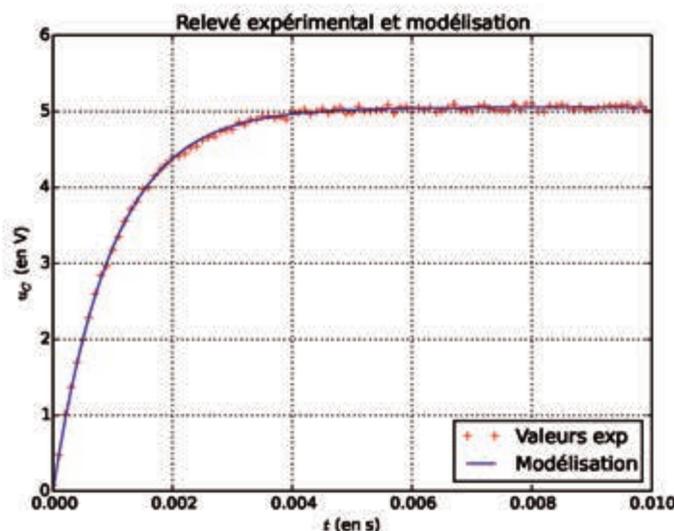


FIGURE 3 – Relevé expérimental et modélisation

B1. Établir l'équation différentielle satisfaite par u_C et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{E}{\tau}$$

B2. Comment nomme-t-on τ ? Quelle est sa signification physique ?

B3. (*) Déterminer à l'aide du relevé expérimental fourni une estimation de τ et de E . Bien expliciter le raisonnement suivi.

B4. En déduire alors une estimation de la capacité C du condensateur.

△ △ △ Fin du devoir.