DS 3 Physique – PC 2021/2022

Vendredi 03/12/2021. Durée 4h. Calculatrice autorisée.

Problème 1 – CCP PC 2009

Une fine corde métallique homogène, quasi-inextensible et sans raideur, de masse linéique μ, est soumise à une tension d'équilibre T. Ses déformations dans le plan (x, y) sont décrites par une fonction de hauteur $y = h(x,t)$. Dans tout le problème, les déformations de la corde par rapport à l'axe horizontal sont supposées suffisamment faibles pour que :

- l'angle $\alpha(x,t)$ que fait la courbe h avec l'horizontale soit un infiniment petit d'ordre 1, tout comme la dérivée $\partial h/\partial x$.
- les déplacements d'un point matériel lié à la corde n'aient qu'une composante verticale, les déplacements horizontaux étant négligeables.

Les extrémités de la corde sont dénommées A et B, d'abscisse respective x_A et x_B. Le milieu de la corde est noté C, d'abscisse x_C (Figure II.1). Tout au long du problème, on négligera les effets de pesanteur devant les forces de tension de la corde.

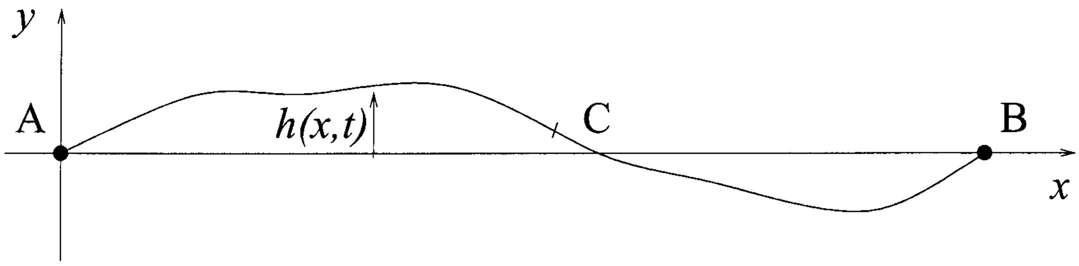


Figure II.1

- **II.1.1**
  Soit un point O d'abscisse x_O situé dans l'intervalle [AB] ($x_A < x_0 < x_B$). La partie de la corde située à droite du point O ($x > x_O$) exerce à chaque instant sur la partie de la corde située à sa gauche une certaine force $\vec{F}(x_O, t)$.
  Comment s'exprime, en fonction de T et d'une dérivée de $h(x,t)$, la composante verticale (suivant y) de cette force $\vec{F}$?

- **II.1.2**
  Etablir, dans le cadre des hypothèses énoncées ci-dessus, l'équation de d'Alembert vérifiée par $h(x,t)$. Exprimer la célérité c associée en fonction des paramètres μ et T.

- **II.1.3**
  Peut-on observer des discontinuités spatiales de la dérivée $\partial h/\partial x$ en des points autres que A et B ? Justifier votre réponse.

- **II.1.4**
  La corde est fixée en ses deux extrémités A et B à une hauteur nulle, soit $h(x_A, t) = 0$ et $h(x_B, t) = 0$. La longueur de la corde entre ces deux points est $2L$, et l'on choisit l'origine du

repère de façon à avoir $x_A = 0$ et $x_B = 2L$.
On recherche les ondes stationnaires de vibration de la corde sous la forme :

$$h(x,t) = Z\sin(kx+\phi)\cos(\omega t)$$

où Z est une amplitude arbitraire.
Donner, en la démontrant, la relation existant entre ω, k et c.

- **II.1.5**
Les valeurs admissibles de k (norme du vecteur d'onde) forment une suite de valeurs discrètes k_n, où $n = 1, 2, 3 \ldots$ est entier positif.
Donner l'expression des k_n admissibles, des pulsations propres ω_n et des fréquences f_n associées.
Comment choisir la phase ϕ ?

- **II.1.6**
Tracer soigneusement l'allure de la déformation associée au mode de vibration fondamental k_1, telle qu'on pourrait l'observer à l'aide, par exemple, d'une caméra rapide ou d'une lampe stroboscopique.
Tracer de la même façon l'allure des déformations associées à la première, deuxième et troisième harmonique (respectivement k_2, k_3, k_4).
Compter et faire figurer sur votre schéma, à chaque fois, le nombre de "noeuds" et de "ventres" associés à ces modes de vibration.

- **II.1.7**
On peut montrer que l'énergie mécanique **par unité de longueur** $e(x,t)$ associée à l'onde est égale à :

$$e(x,t) = \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]$$

Calculer la valeur moyenne temporelle $\langle e\rangle$ en un point quelconque x de la corde, pour le mode de vibration fondamental.

- **II.1.8**
En déduire l'énergie totale associée à la vibration du mode fondamental. On exprimera le résultat en fonction de la tension T de la corde, de sa demi-longueur L et de l'amplitude Z des vibrations.
Application numérique : Que vaut l'amplitude Z des vibrations lorsque l'énergie totale du mode est égale à 0,1 J, avec $L = 1$ m, $T = 100\ N$?

Procédés physiques de transmission d'un signal

Dans ce problème, on se propose d'étudier et de comparer le câble coaxial et la fibre optique comme supports de distribution de signaux. La **partie I** traite du câble coaxial. Dans la sous-partie **I.1**, on le supposera parfait, tandis que la sous-partie **I.2** visera à en affiner la modélisation. La **partie II** traite de la fibre optique. Après avoir rappelé quelques résultats généraux d'optique géométrique dans la sous-partie **II.1**, on détaillera la propagation des rayons dans la fibre à saut d'indice (sous-partie **II.2**) puis dans la fibre optique à gradient d'indice (sous-partie **II.3**), ce qui nous conduira à analyser une technique d'augmentation de la capacité de transmission : le multiplexage (sous-partie **II.4**). La sous-partie **II.5** est consacrée aux pertes associées à l'usage de la fibre optique.

Partie I – Le câble coaxial

Un câble coaxial, représenté en **figure 1**, est constitué d'un fil de cuivre cylindrique central, de rayon a, appelé âme, et d'un conducteur cylindrique creux de même axe de révolution, également en cuivre, appelé gaine et de rayon intérieur b. Un isolant occupe tout l'espace entre l'âme et la gaine. À l'entrée du câble coaxial, on place un générateur de tension, non représenté, entre l'âme et la gaine.

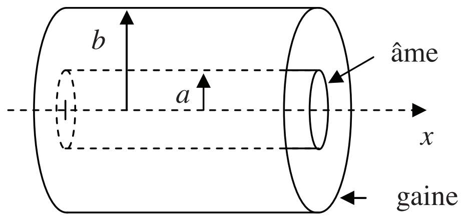
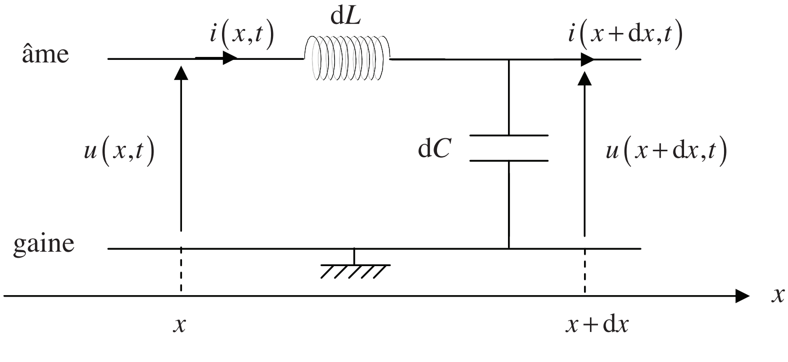


Figure 1 – Structure d'un câble coaxial

On modélise le câble coaxial, milieu continu, par une ligne électrique à constantes réparties, pour laquelle on note respectivement Λ et Γ les inductance et capacité par unité de longueur. La ligne est modélisée par une succession de tronçons élémentaires de longueur $\mathrm{d}x$, considérés comme des quadripôles élémentaires auxquels sont associées une inductance $\mathrm{d}L = \Lambda \cdot \mathrm{d}x$ et une capacité $\mathrm{d}C = \Gamma \cdot \mathrm{d}x$. Le schéma électrique d'un tronçon de ligne de longueur $\mathrm{d}x$ est représenté en **figure 2**. Dans ce modèle, on néglige toute perte résistive. On note $i(x,t)$ et $i(x+\mathrm{d}x,t)$ les intensités des courants dans la ligne, à l'instant t, aux abscisses respectives x et $x+\mathrm{d}x$. On note $u(x,t)$ et $u(x+\mathrm{d}x,t)$ les tensions entre l'âme et la gaine, à l'instant t, aux abscisses respectives x et $x+\mathrm{d}x$. Les tensions et courants sont des signaux sinusoïdaux alternatifs de fréquence f.



I.1 – Le câble coaxial parfait

Q1. Comment le courant circulant dans l'âme revient-il jusqu'au générateur de tension ?

Q2. Démontrer que les deux équations différentielles couplées sur u et i sont : $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\Lambda \cdot \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -\Gamma \cdot \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$.

Vous considérerez, notamment, que : $\dfrac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ à l'ordre 0 en dx.

Par ailleurs, on rappelle que, puisque dx tend vers zéro, nous avons les relations suivantes :

$u(x+dx,t) - u(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} \cdot dx$ et $i(x+dx,t) - i(x,t) = \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x} \cdot dx$.

Q3. Montrer que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ obéissent à deux équations de propagation de D'Alembert.

En déduire l'expression de la vitesse de propagation v des signaux dans la ligne en fonction de Λ et Γ. Vérifier sa dimension.

Q4. On étudie les solutions des équations de D'Alembert en régime permanent sinusoïdal. La tension $u(x,t)$ correspond à la partie réelle de la tension complexe $\underline{u}(x,t)$. L'intensité $i(x,t)$ correspond à la partie réelle de l'intensité complexe $\underline{i}(x,t)$. On propose, avec j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$, des solutions complexes des équations de propagation de la forme :

$$\underline{u}(x,t) = \rho \cdot i_0 \cdot \exp\left(j(\omega \cdot t - k \cdot x)\right) - \rho \cdot i_1 \cdot \exp\left(j(\omega \cdot t + k \cdot x)\right)$$

et

$$\underline{i}(x,t) = i_0 \cdot \exp\left(j(\omega \cdot t - k \cdot x)\right) + i_1 \cdot \exp\left(j(\omega \cdot t + k \cdot x)\right).$$

Vérifier que $\underline{u}(x,t)$ est compatible avec l'équation trouvée à la question **Q3**, à une condition sur v, ω et k qu'on explicitera.

Donner une interprétation physique de chacun des deux termes présents dans les expressions de $\underline{u}(x,t)$ et $\underline{i}(x,t)$.

Pour la suite, nous considérerons toujours i_0 non nul.

Q5. Donner l'expression de ρ en fonction de l'impédance caractéristique $Z_c = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}$.

Préciser son unité.

Q6. L'extrémité du câble, de longueur d, est fermée sur une impédance $\underline{Z}$. Exprimer i_1 en fonction de : i_0, $\underline{Z}$, ρ, k et d.

Q7. L'impédance totale de la ligne vue depuis l'abscisse x, notée $\underline{Z_l}(x)$, a pour expression : $\underline{Z_l}(x) = \dfrac{\underline{u}(x,t)}{\underline{i}(x,t)}$. Donner l'expression de $\underline{Z_l}(x)$ en fonction de : $\underline{Z}$, ρ, k, d et x. À quelle condition sur $\underline{Z}$, l'impédance $\underline{Z_l}(x)$ est indépendante de l'abscisse x ? Quelle est alors l'expression de $Z_l(x)$? Que dire dans ce cas de i_1 et que peut-on alors conclure ?

Quelle impédance mettre en bout de câble pour s'assurer, dans le cadre des télécommunications, que la puissance transmise est optimale ?

I.2 – Le câble coaxial avec pertes

La modélisation précédente ne décrit qu'imparfaitement la propagation du signal. Aussi on se propose d'étudier le modèle représenté en **figure 3** dans lequel on a inséré une résistance $\mathrm{d}R = r \cdot \mathrm{d}x$ par rapport au modèle de la **figure 2** de la page 2.

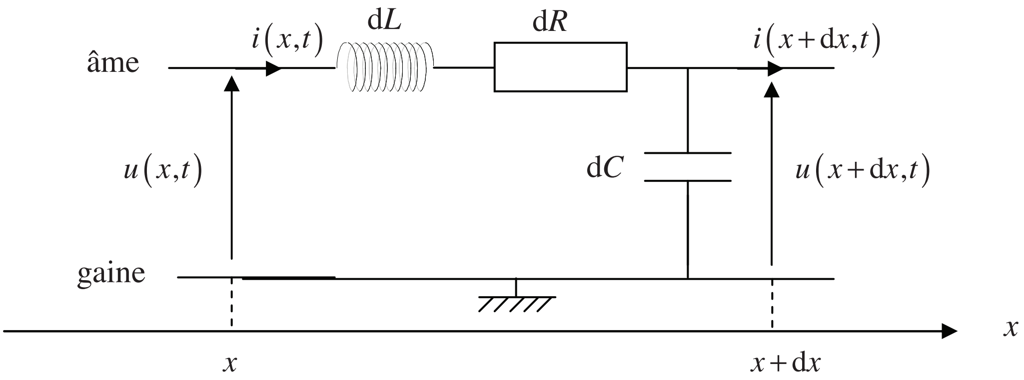


Figure 3 – Schéma électrique d'un tronçon de ligne imparfait de longueur dx

Q8. Quelle est l'origine physique de la résistance dR ?

Q9. Montrer que l'équation de propagation de l'onde de tension $u(x,t)$ est :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \Lambda \cdot \Gamma \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + r \cdot \Gamma \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Q10. En considérant une solution de la forme $\underline{u}(x,t) = u_0 \cdot \exp\left(j\left(\omega \cdot t - \underline{k} \cdot x\right)\right)$ à l'équation de propagation précédente, dans laquelle $\underline{k}$ est une pulsation spatiale complexe, trouver l'équation de dispersion associée à la ligne.

Q11. On écrit $\underline{k}$ sous la forme : $\underline{k} = \alpha - j \cdot \beta$. Que représentent physiquement α et β ? Justifier, par un raisonnement physique, le signe de β lorsque $\alpha > 0$.

Q12. On définit l'atténuation linéique de puissance du signal entre le point d'entrée du câble coaxial en $x = 0$ et un point d'abscisse x par la grandeur A, exprimée en décibel par unité de longueur, $A = \dfrac{10 \cdot \log\left(\dfrac{P_0}{P(x)}\right)}{x} = \dfrac{\dfrac{10}{\ln 10} \cdot \ln\left(\dfrac{P_0}{P(x)}\right)}{x}$, avec $P(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{u}(x,t) \cdot \underline{i}^*(x,t)\right)$ la puissance moyenne de l'onde à l'abscisse x et $P_0 = P(x=0) = \dfrac{1}{2} u_0 \cdot i_0$ la puissance moyenne de l'onde en entrée du câble.

En considérant que $\underline{i}(x,t) = i_0 \cdot \exp\left(j\left(\omega \cdot t - \underline{k} \cdot x\right)\right)$, exprimer A en fonction de β.

Q13. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, montrer que si $r \ll \Lambda \cdot \omega$, alors $A = \dfrac{10}{\ln 10} \cdot r \cdot \sqrt{\dfrac{\Gamma}{\Lambda}}$.

Problème 3 – e3a PC 2018

Après la vue, l'ouïe est le deuxième sens le plus développé chez l'homme, même si de nombreux animaux ont une ouïe beaucoup plus fine que la nôtre. C'est le sens qui nous permet de profiter de la beauté de la musique, de transmettre de nombreuses informations, mais aussi celui qui est agressé par de nombreuses nuisances sonores, au point que cette pollution est reconnue au même titre que celles de l'eau, de l'air, ou la pollution lumineuse.

Nous commencerons cette partie par une mise en équation, puis nous conduirons l'étude d'une onde harmonique, ensuite nous étudierons différents aspects de l'acoustique musicale : spectre d'un instrument, problèmes pouvant survenir pendant des concerts, gestion d'une école de musique, isolation acoustique.

Les sous-parties sont globalement indépendantes, mais il est conseillé de lire les sous-parties précédentes avant d'en entamer une nouvelle.

On négligera la pesanteur dans toute cette partie.

Le référentiel terrestre sera considéré comme galiléen.

L'air sera considéré comme un gaz parfait diatomique non visqueux de rapport $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ = 1,40 et de masse molaire M = 29,0 g.mol^{-1}.

On donne la constante des gaz parfaits : R = 8.31 J.mol^{-1}.K^{-1}.

On donne les courbes d'audibilité et de douleur de l'oreille humaine sur la figure 1. Y sont tracées également des courbes isophoniques, qui relient les points de même sensation d'intensité sonore pour l'oreille humaine.

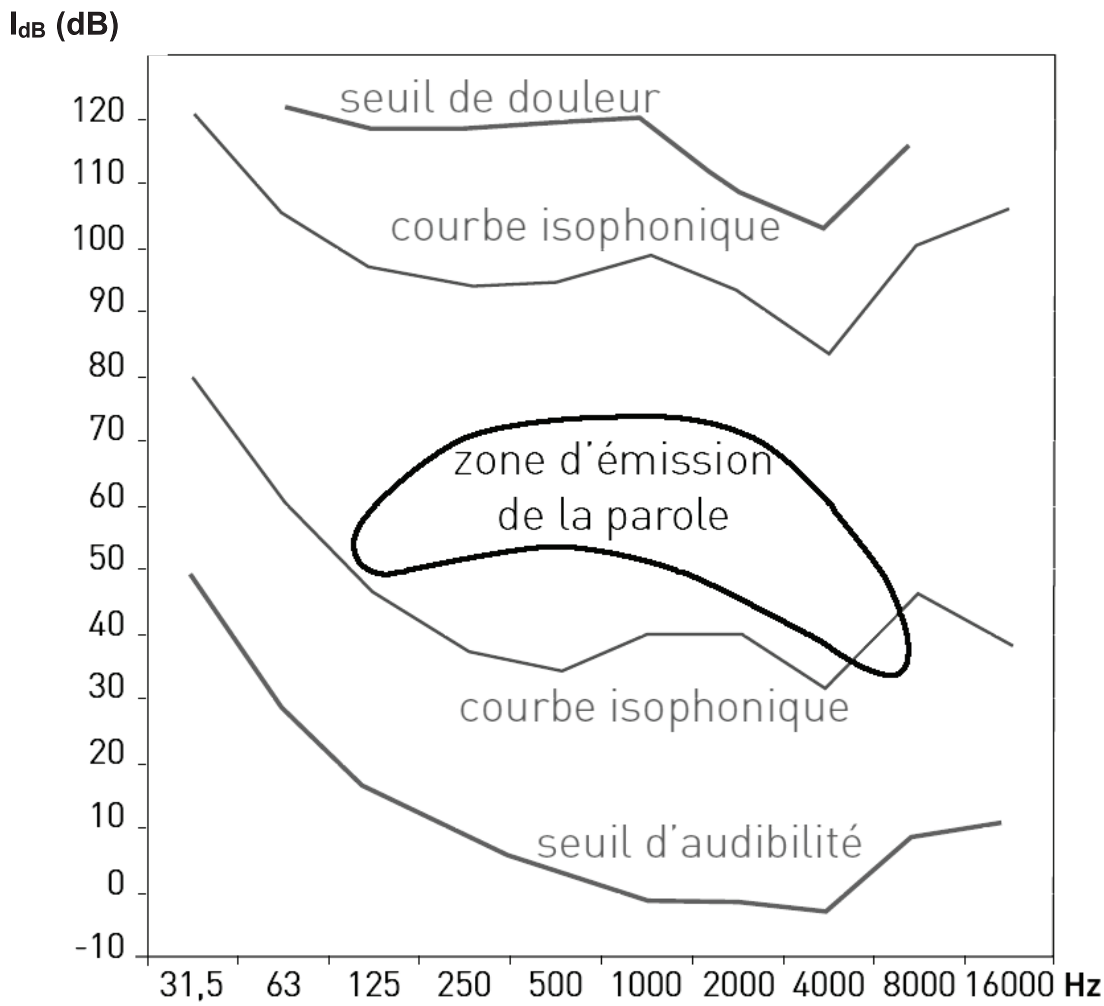


Figure 1 – Courbes de sensibilité de l'oreille humaine
(Intensité sonore en dB en fonction de la fréquence en Hz)

A / Mise en équation

Nous allons travailler dans cette sous-partie avec des ondes unidimensionnelles, c'est-à-dire des champs ne dépendant que de la coordonnée d'espace x et du temps t.

Au repos, l'air peut être décrit par les champs de pression P_0 = 1,00 bar, de masse volumique μ_0 et de vitesse $\vec{v}_0 = \vec{0}$, tous uniformes. L'onde sonore est une perturbation de cet état d'équilibre, où les champs deviennent :
- champ de pression : $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$ où p est la surpression ;
- champ de masse volumique : $\mu(x,t) = \mu_0 + \rho(x,t)$;
- champ de vitesse : $\vec{v}(x,t) = \vec{0} + v(x,t)\,\vec{u}_x$.

L'approximation acoustique consiste à considérer que les termes de perturbation p/P_0, ρ/μ_0 et v/c sont des infiniment petits d'ordre 1.

A1. Écrire l'équation d'Euler dans l'air. La linéariser en expliquant convenablement les simplifications faites. L'équation linéarisée sera notée (E).

A2. Écrire l'équation de conservation de la masse (ou équation de continuité). La linéariser. L'équation linéarisée sera notée (M).

A3. Lors du passage d'une onde sonore, les transformations de l'air sont supposées adiabatiques réversibles. On introduit χ_S le coefficient de compressibilité isentropique de l'air. Rappeler l'expression de χ_S en fonction de la pression P et du volume V d'une particule de fluide, puis en fonction de la pression P et de la masse volumique du fluide μ.
Linéariser cette expression dans le cadre de l'approximation acoustique. L'équation linéarisée sera notée (T).

A4. En utilisant les équations (E), (M) et (T), retrouver l'équation de propagation de l'onde sonore à une dimension vérifiée par p $\boxed{\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}}$ Donner l'expression de c.

Expliquer comment on peut passer à l'équation d'une onde sonore tridimensionnelle.

A5. Déterminer l'expression de c pour un gaz parfait et sa valeur numérique pour l'air à θ = 20,0 °C.

B / Étude d'une onde sonore harmonique

B1. On étudie une onde unidimensionnelle dont le champ de surpression complexe s'écrit $\underline{p}(x,t) = p_0 \; exp\; [j(\omega t - kx)]$.
Justifier clairement que cette onde est plane, progressive, harmonique, et préciser dans quel sens elle se propage. On donnera la définition de chaque terme et on précisera pour chacun pourquoi on peut l'attribuer à cette onde.

B2. Établir la relation de dispersion pour cette onde. Qu'en déduire ?

B3. On cherche le champ de vitesse complexe sous la forme $\underline{v}(x,t) = \underline{v}_0 \; exp\; [j(\omega t - kx)]$, avec $\vec{\underline{v}} = \underline{v}\,\vec{u}_x$.
Montrer qu'on peut écrire $\underline{p}(x,t) = Z\, \underline{v}(x,t)$. Préciser l'expression de Z et donner son nom.

B4. Déterminer l'expression de Z pour un gaz parfait.
En déduire sa valeur numérique pour l'air à T = 20,0 °C et P_0 = 1,00 bar.

B5. On définit l'intensité sonore par la valeur moyenne $I = \langle p\, v \rangle$.
Vérifier que I a bien la dimension d'une puissance surfacique.

B6. On définit l'intensité sonore en décibels comme $I_{dB} = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, où I_0 est l'intensité de référence et vaut $I_0 = 1{,}00.10^{-12}$ W.m^{-2}.
Justifier la différence avec le gain en décibels en électricité, défini par $G_{dB} = 20 \log\left(\frac{u_s}{u_e}\right)$ où u_s et u_e sont respectivement les tensions de sortie et d'entrée du montage.

B7. On veut ici vérifier si l'approximation acoustique est justifiée, même pour un son très intense d'intensité I_M.
Déterminer les expressions de p_0 et de v_0, amplitudes de la pression et de la vitesse, en fonction de I_M notamment.
Donner un ordre de grandeur de l'intensité en décibels d'un son très intense, en déduire l'intensité I_M correspondante puis p_0 et v_0 et conclure.

D / Problèmes à résoudre lors de concerts

Les questions qui sont posées dans cette sous-partie demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être indiquées même si elles n'aboutissent pas. Le barème tiendra compte du temps nécessaire pour répondre à de telles questions et les valorisera. On pourra utiliser la figure 1 et tous les résultats précédemment obtenus.

D1. Au cours d'un concert, dès que le chanteur passe devant le haut-parleur, il se met à y avoir un sifflement très désagréable.
Expliquer l'apparition de ce sifflement.

D2. Les enfants d'une classe participent à un concours de chant en plein air où les parents de plusieurs dizaines d'écoles les écoutent sur un terrain de sport de largeur 50 m. Pour que tout le monde entende, un micro enregistre leur chanson et un haut-parleur le restitue et l'amplifie pour les parents.
À quelle distance des haut-parleurs doit-on placer le premier rang ?

D3. Lors d'un concert de piano-chant, le chant du soliste fait 65 dB, tandis que la musique du piano atteint 80 dB. Par conséquent, on n'entend pas le chant du soliste.
Le chef de chœur vous demande alors combien il faudrait de chanteurs pour qu'on entende le chant.
Répondre à sa question.

△ △ △ Fin du devoir.