DS 2 Physique – PC 2021/2022

Vendredi 22/10/2021. Durée 2h. Calculatrice autorisée.

Problème 1 – e3a PC 2008

Dans une pièce d'habitation ou un bâtiment de stockage, il est souvent souhaitable de maintenir la température constante, indépendamment des variations de la température extérieure T_{ext}. Parmi les différents systèmes de régulation envisageables, le plus simple consiste à agir sur le débit du fluide caloporteur dans la conduite.

Cette partie est consacrée à l'analyse simplifiée d'un tel système de régulation.

La viscosité η du fluide s'écoulant dans le tube est désormais prise en compte. La pesanteur est négligée. Il est rappelé qu'alors, le champ de vitesse $\vec{v}(M,t)$ et le champ de pression $P(M,t)$ dans un fluide incompressible sont reliés par l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}\,P + \eta\,\Delta\vec{v}$$

Pour simplifier les calculs, considérons une géométrie plane (figure 4) :

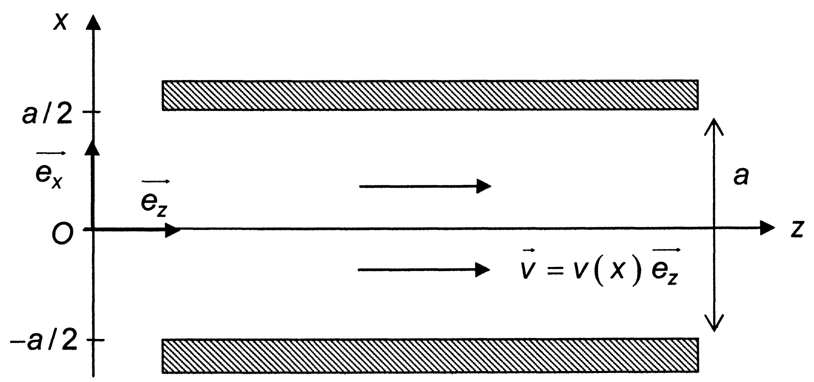


Figure 4

L'espace étant rapporté au trièdre cartésien Oxyz de base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$, considérons un fluide en écoulement stationnaire et unidirectionnel entre les deux plans $x=-a/2$ et $x=a/2$ (figure 4). Le champ de vitesses est de la forme : $\vec{v}=v(x)\overrightarrow{e_z}$.

1*a. Exprimer $\overrightarrow{\text{grad}}P$ en fonction de η et $\dfrac{d^2v}{dx^2}$.

1*b. En déduire que la pression P ne dépend que de z et montrer que la quantité $K=-\dfrac{dP}{dz}$ est une constante.

1*c. Rappeler les conditions aux limites vérifiées par v(x) en $x=\pm\, a/2$.

1*d. Déterminer v(x) en fonction de x, K, a et η.
Représenter graphiquement le profil de vitesse entre les deux plans.
Justifier physiquement pourquoi la grandeur K doit être strictement positive pour que l'écoulement soit dirigé selon $\overrightarrow{e_z}$.

1*e. Montrer que le débit massique total transporté suivant $\overrightarrow{e_z}$, à travers une section de largeur H selon Oy, s'écrit : $D_m=\alpha\,K\,a^3$, en explicitant α en fonction de η, ρ et H.

2 / CONDUCTANCE HYDRAULIQUE

Considérons le système précédent, compris entre les abscisses $z=0$ et $z=L$.

2*a. Exprimer la quantité K en fonction de $P(0)$, $P(L)$ et L.

2*b. Montrer que le débit à travers une section de largeur H selon Oy peut s'écrire :
$$D_m=G_h\left[P(0)-P(L)\right],$$
où le terme G_h sera exprimé en fonction de α, a et L.

2*c. Justifier le nom de « conductance hydraulique » pour G_h en faisant une analogie électrique. Préciser en particulier l'équivalent électrique de D_m et celui de la chute de pression $P(0)-P(L)$.

3 / CONTROLE DU DEBIT PAR CHANGEMENT DE SECTION

Le système, toujours invariant selon Oy, présente maintenant un rétrécissement ajustable (figure 5) de longueur L_r. Ce rétrécissement est obtenu à l'aide d'une pièce plane (C) (dite « pièce d'obstruction ») coulissant (de façon étanche !) selon Ox dans une ouverture pratiquée dans le plan inférieur. La position de cette pièce est repérée par le débordement x représenté en figure 5 ; au-dessus de (C), la largeur de la conduite devient $a-x$.

Il est admis que chaque portion (rétrécie ou non) se comporte comme le système infini étudié aux sous-parties 1 et 2 précédentes.

3*a. En considérant le système comme une association de conductances hydrauliques, exprimer le débit massique à travers une section droite de largeur H selon Oy en fonction de $P(0)-P(L)$, α, L, L_r, a et x.

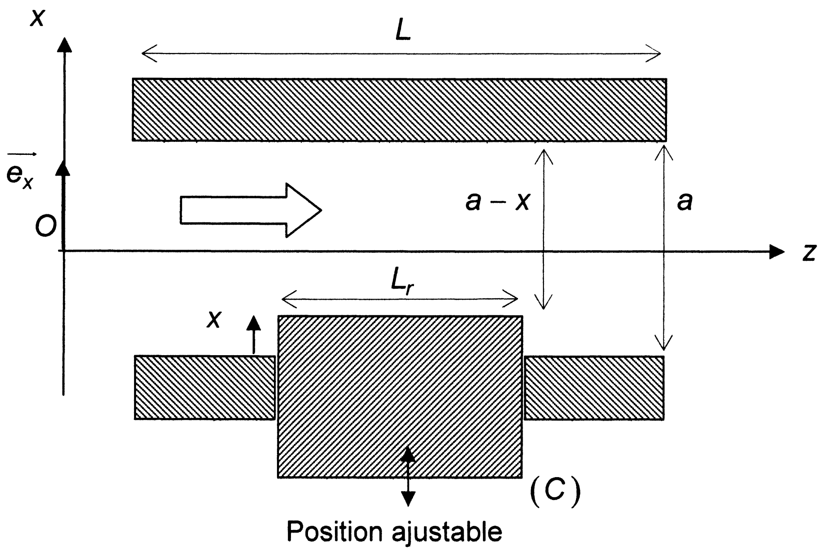


Figure 5

La différence de pression $P(0) - P(L)$ étant fixée, le débit est ajusté en modifiant la valeur de x autour d'une valeur moyenne x_0. Les déplacements de (C) sont de faible amplitude, si bien qu'il est possible de poser $x = x_0 + \varepsilon$, avec $\varepsilon << x_0$.

3*b. Montrer qu'au premier ordre en ε, le débit massique peut s'écrire :

$$D_m = D_{m0}\left(1 - b\varepsilon\right), \qquad (6)$$

en posant $D_{m0} = \dfrac{\alpha\left[P(0) - P(L)\right]}{\dfrac{L - L_r}{a^3} + \dfrac{L_r}{(a - x_0)^3}}$ et où b est une constante positive à exprimer en fonction de L, L_r, a et x_0.

Problème 2 – Agrégation externe de chimie 2006

On rappelle l'équation d'Euler :

$$\partial \boldsymbol{v}/\partial t + (\boldsymbol{v}.\mathbf{grad})\boldsymbol{v} = -1/\rho\, \mathbf{grad}\, P + \boldsymbol{g}$$

et la relation de Bernoulli : $P / \rho + g\ z + v^2 / 2 = \text{constante}$

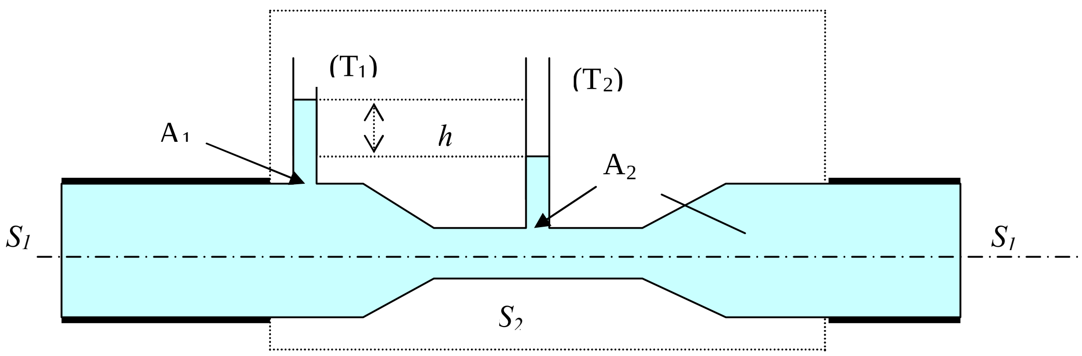
3.1. Citer les conditions qui doivent être remplies pour que cette dernière relation puisse être applicable.

3.2. Faire une interprétation énergétique de la relation de Bernoulli.

3.3. Par une analyse dimensionnelle, montrer que cette relation est homogène.

On insère dans une canalisation de section S_1 un tube dit « de Venturi » de section S_2. Le fluide s'écoulant en régime permanent dans la canalisation est de l'eau. On considère que les vitesses sont uniformes dans chaque section droite du tube.

L'axe de la canalisation est horizontal et deux tubes verticaux (T_1) et (T_2) jouent le rôle de capteurs de pression. On observe une dénivellation de hauteur h entre les surfaces libres de l'eau des tubes (T_1) et (T_2) ouverts à l'air.



Tube de Venturi

On note P_0 la pression atmosphérique, P_1 la pression et v_1 la vitesse de l'écoulement en amont du tube de Venturi. A_1 est un point à la base du tube (T_1) et A_2 est un point à la base du tube (T_2).

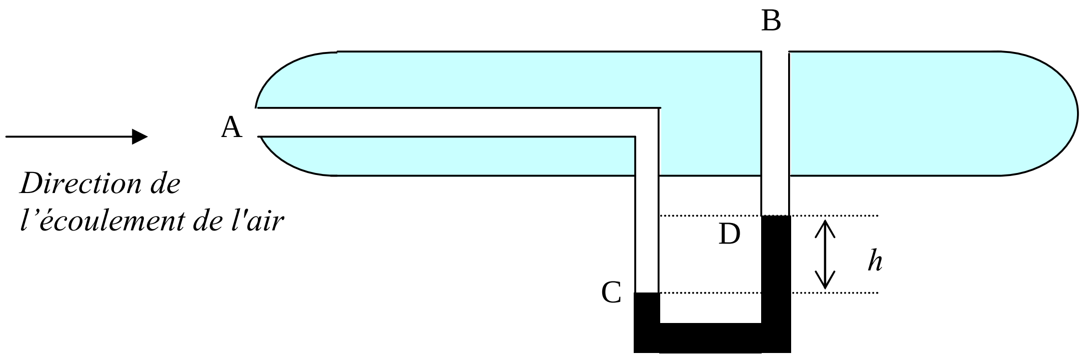
4.1. Les vitesses d'écoulement du fluide sont notées v_2 dans le tube de section S_2 et v_3 en aval du tube de Venturi. Exprimer ces vitesses en fonction de la constante de pesanteur g, de h, de S_1 et de S_2.

4.2. Exprimer le débit volumique D_v en fonction de g, h, S_1 et S_2.

4.3. Application numérique : S_1 = 50 cm² ; S_2 = 30 cm^2 ; h = 1,25 m.

4.4. Quel est l'intérêt pratique d'un tel dispositif ?

Les tubes de Pitot sont utilisés en aéronautique pour mesurer la vitesse d'un avion. Ils sont constitués d'un tube très fin placé parallèlement à la direction de l'écoulement de l'air. Les orifices A et B permettent des prises de pressions.



Tube de Pitot

On considère que l'air est un fluide parfait, incompressible et en écoulement stationnaire, et que le dispositif ne perturbe pas l'écoulement.

La masse volumique, la vitesse et la pression de l'air loin du tube sont notées respectivement ρ_0, $\boldsymbol{v_0}$ et P_0.

5.1. Représenter l'allure de la ligne de courant $\mathcal{C}_A$ qui aboutit en A et l'allure de $\mathcal{C}_B$ qui longe le tube en B.

5.2. Déterminer les vitesses v_A en A et v_B en B ainsi que les pressions P_A et P_B. Quel est le nom donné au point A ?

5.3. Dans le manomètre, on mesure une dénivellation h entre les deux niveaux de liquide de masse volumique ρ_l. En déduire la vitesse d'écoulement v_0 de l'air.
A.N. : $h = 24$ *cm. ;* $\rho_l = 1{,}0.10^3\ kg.m^{-3}$.

△ △ △ Fin du devoir.