

# DS 1 Physique – PC 2021/2022

Vendredi 24/09/2021. Durée 4h. Calculatrice autorisée.

## Problème 1 – Centrale MP 2014

Le début du problème portait sur le phénomène de diffraction dans les télescopes. Celui-ci limite intrinsèquement leurs résolutions angulaires, ce qui pose problème pour regarder des objets très lointains. Utiliser des dispositifs interférentiels permet d'améliorer ces résolutions.

Pour surmonter le problème précédent, on peut faire interférer les signaux optiques reçus par deux télescopes (cf. figure 3).

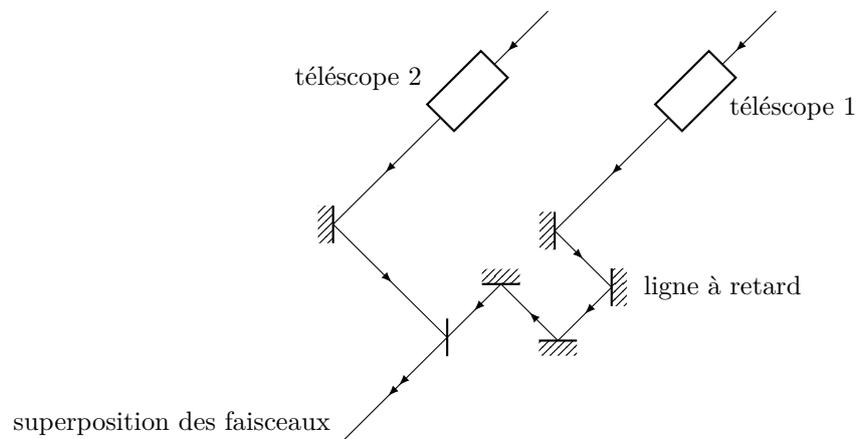


Figure 3 Principe du VLTI

On assimile les deux télescopes distants de  $a$  (variable jusqu'à 100 m) à deux trous  $T_1$  et  $T_2$  de taille négligeable, de sorte que le VLTI sera équivalent au montage de la figure 4, où la lentille d'axe optique  $Oz$ , de centre  $O$  possède une distance focale  $f'$ . Le foyer image de la lentille est noté  $F'$  et le plan focal est le plan d'observation.  $T_1$  et  $T_2$  sont à une distance  $a/2$  de l'axe optique.

### III.A – Observation d'une source ponctuelle dans la direction de l'axe optique

Un unique objet ponctuel à l'infini  $A$  est observé dans la direction de l'axe optique. Pour simplifier, on supposera encore que cet objet émet une unique radiation de longueur d'onde  $\lambda = 2,00 \mu\text{m}$ .



Figure 4 Schéma équivalent du VLTI

III.A.1) Où se trouve l'image géométrique  $A'$  de  $A$  à travers la lentille ?

III.A.2) Calculer la différence de marche  $\delta_0$  entre les ondes provenant de  $A$  et se recombinant en  $A'$ , passant par les deux trous  $T_1$  et  $T_2$  sur la figure 4.

**III.A.3)** En déduire le rôle de la ligne à retard de la figure 3.

**III.A.4)** En quoi y a-t-il nécessité de la ligne à retard pour satisfaire aux conditions d'interférences ?

**III.A.5)** Dans quelle mesure peut-on considérer que le contraste des interférences vaut 1 ? Dans la suite on supposera effectivement que le contraste vaut 1.

**III.A.6)** Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse  $I_A(x)$  d'un point d'abscisse  $x$  dans le plan focal.

**III.A.7)** En déduire l'expression de l'interfrange.

**III.A.8)** Tracer l'allure de la figure d'interférence dans le plan  $(xF'y)$  telle qu'on pourrait l'observer avec une caméra infrarouge.

**III.B – Observation d'une source ponctuelle dans une direction différente de celle de l'axe optique**

Un unique objet ponctuel à l'infini  $B$  est observé dans la direction  $i_B \neq 0$  par rapport à l'axe optique dans le plan  $xOz$ , avec les mêmes caractéristiques que  $A$ .

**III.B.1)** À quelle distance  $x_B$  de  $F'$  se trouve l'image géométrique de  $B$  ?

**III.B.2)** Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse  $I_B(x)$  en un point d'abscisse  $x$ .

**III.B.3)** L'interfrange est-il différent de celui trouvé précédemment ?

**III.C – Observation de deux sources ponctuelles**

Deux objets ponctuels à l'infini  $A$  et  $B$  sont observés dans les directions  $i_A = 0$  et  $i_B \neq 0$  par rapport à l'axe optique dans le plan  $xOz$ . Pour simplifier, on supposera que ces deux objets émettent une unique radiation de longueur d'onde  $\lambda = 2,00 \mu\text{m}$  et la même puissance lumineuse.

**III.C.1)** Ces deux sources sont-elles cohérentes ? Justifier la réponse.

**III.C.2)** En déduire l'intensité lumineuse  $I_{A \cup B}(x)$  en un point d'abscisse  $x$ .

**III.C.3)** Pour quelle(s) distance(s)  $a$  entre les deux télescopes y a-t-il brouillage des interférences ? On exprimera le résultat en fonction de  $i_B$ .

**III.C.4)** Proposer alors une méthode de détermination expérimentale de l'angle entre deux étoiles composant une étoile double.

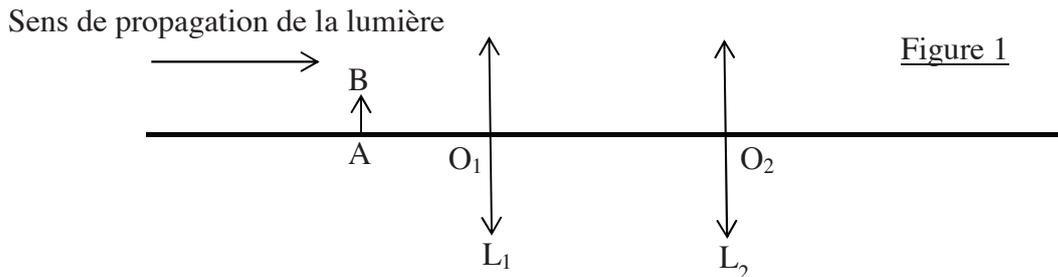
**III.C.5)** Quelle est la valeur numérique (en secondes d'arc) de la limite de résolution angulaire  $i_m$  du VLTI ?

**Données du problème 3 :**  $\cos a + \cos b = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

## Problème 2 – Banque PT 2017

Le microscope est modélisé sur la figure 1, par un système de deux lentilles minces convergentes, l'une constituant l'objectif (lentille  $L_1$  de centre  $O_1$  et de distance focale image  $f'_1 = 5 \text{ mm}$ ), et l'autre constituant l'oculaire (lentille  $L_2$  de centre  $O_2$  et de distance focale image  $f'_2 = 15 \text{ mm}$ ).

On fixe  $\overline{O_1O_2} = D_0 = 120 \text{ mm}$ . On choisit le sens positif dans le sens de propagation de la lumière.



On rappelle la relation de conjugaison d'une lentille et l'expression du grandissement  $\gamma$  :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

**A.1.1** Les relations précédentes sont valables à condition que les rayons lumineux satisfassent les conditions de Gauss. Donner ces 2 conditions.

**A.1.2** Si  $F'_1$  est le foyer image de  $L_1$  et  $F_2$  le foyer objet de  $L_2$ , on définit l'intervalle optique par la grandeur algébrique  $\Delta = \overline{F'_1 F_2}$ . Exprimer  $\Delta$  en fonction de  $f'_1$ ,  $f'_2$ ,  $D_0$ , puis calculer sa valeur.

**A.1.3** Un objet réel AB perpendiculaire à l'axe optique est éclairé et placé à une distance  $d$  de  $L_1$ , à sa gauche, de façon à ce que l'image A'B' donnée par l'objectif, appelée image intermédiaire se trouve dans le plan focal objet de l'oculaire. L'observation se fait à l'œil placé au contact de l'oculaire.

**A.1.3.1** Exprimer  $d$  en fonction de  $f'_1$  et  $\Delta$ , puis calculer sa valeur.

**A.1.3.2** Exprimer le grandissement  $\gamma_1$  induit par l'objectif en fonction de  $f'_1$  et  $\Delta$ , puis calculer sa valeur.

**A.1.3.3** Quel est l'intérêt pour l'observateur de cette position de l'objet ?

**A.1.3.4** Faire une construction géométrique faisant apparaître l'objet, l'image intermédiaire, ainsi que l'angle  $\alpha'$  sous lequel est observée l'image finale à travers le microscope.

**A.1.4** Le grossissement commercial du microscope est défini par  $G = \left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right|$  où  $\alpha$  est l'angle sous lequel serait vu l'objet à l'œil nu placé à une distance  $D = 250$  mm.

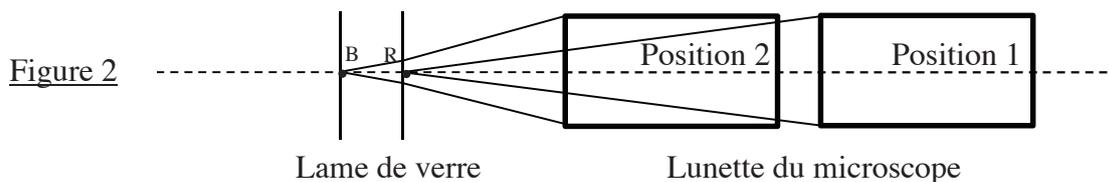
L'objet étant de très petite taille, ces deux angles seront bien sûr très faibles.

Exprimer  $G$  en fonction de  $\Delta$ ,  $D$ ,  $f'_1$  et  $f'_2$ , puis calculer sa valeur.

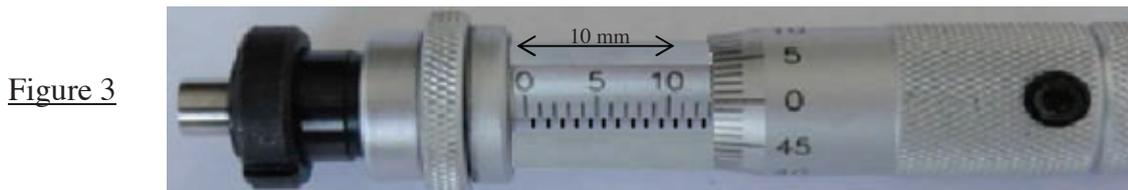
**A.1.5** On utilise ce microscope pour mesurer l'épaisseur  $e$  d'une mince lame de verre à faces parallèles, d'indice  $n=1.5$ .

On colle une petite pastille bleue (B) sur la face gauche de la lame et une petite pastille rouge (R) sur sa face droite.

On positionne d'abord la lunette (ensemble objectif+oculaire) du microscope de façon à faire la mise au point sur la pastille rouge (Figure 2, Position 1). Puis, grâce à une vis micrométrique, on translate la lunette d'une distance  $\varepsilon$ , de façon à faire la mise au point sur l'image de la pastille bleue (Figure 2, Position 2) :



La figure 3 ci-dessous montre la position 2 de la vis micrométrique, la position 1 correspondant à la graduation 40 de la partie mobile.



**A.1.5.1** Déterminer la valeur mesurée de  $\varepsilon$  en mm, avec une estimation de l'incertitude de mesure.

**A.1.5.2** En tenant compte du phénomène de réfraction et en considérant les rayons lumineux très peu inclinés par rapport à l'axe optique, exprimer  $e$  en fonction de  $n$  et  $\varepsilon$ , puis calculer sa valeur.

## Mission prolongée pour la sonde Juno

### Introduction

Jupiter est la planète la plus volumineuse du système solaire et fait partie des planètes « géantes gazeuses ». Compte tenu du rôle central de la planète géante dans la formation du système solaire, celle-ci intrigue toujours les scientifiques puisque de nombreuses questions concernant sa formation restent sans réponse. En particulier, deux scénarios s'affrontent sur la manière dont la planète Jupiter s'est constituée :

- **premier scénario** : la planète s'est formée en deux temps - accréation<sup>1</sup> des matériaux situés dans son voisinage jusqu'à former un noyau solide représentant une dizaine de masses terrestres puis effondrement gravitationnel de la masse de gaz et de poussière entourant la planète ;
- **second scénario** : celui-ci repose sur le seul effondrement gravitationnel d'un nuage de gaz et de poussières mais nécessite la présence d'une nébuleuse originelle de plus grande taille que celle retenue dans les scénarios de formation du système solaire.

La sonde Juno a pour objectif principal de résoudre ce dilemme en collectant des données permettant de reconstituer l'histoire de la formation de la planète géante et son évolution.

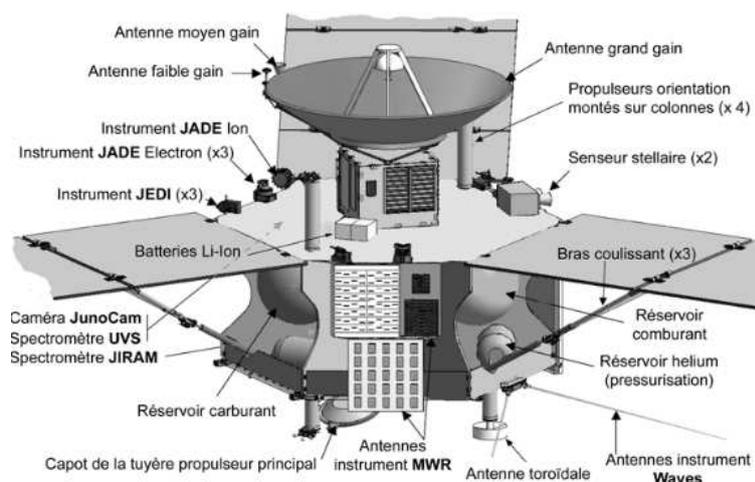


Figure 1 – Présentation de la sonde Juno - D'après Wikipedia

## Partie I - Les caractéristiques de Jupiter

### I.1 - Observer Jupiter depuis la Terre

C'est en janvier 1610, à l'aide d'une très modeste lunette astronomique, que Galilée se rendit compte de la présence de quatre points lumineux à proximité de la planète géante. En notant soigneusement leurs positions, plusieurs soirs de suite, il s'aperçut que ces quatre points étaient mobiles et comprit qu'ils tournaient autour de la planète. Galilée venait de découvrir les quatre satellites principaux de Jupiter.

---

1. processus d'agglomération

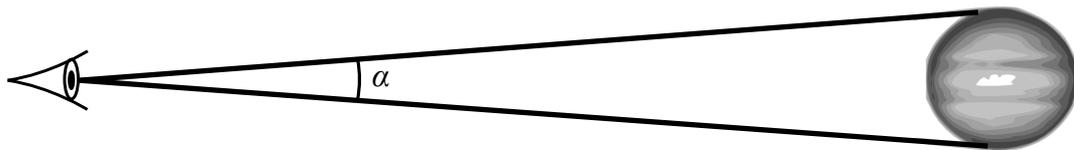
Le **tableau 1** regroupe certaines données concernant ces satellites dont les orbites sont quasi circulaires :

Satellite	Distance moyenne au centre de Jupiter	Période de révolution sidérale
Io	$4,218 \cdot 10^5$ km	1,769 jour
Europe	$6,714 \cdot 10^5$ km	3,551 jours
Ganymède	$1,070 \cdot 10^6$ km	7,155 jours
Callisto	$1,883 \cdot 10^6$ km	16,689 jours

**Tableau 1** – Données concernant les principaux satellites de Jupiter

- Q1.** Énoncer la troisième loi de Kepler, puis estimer la masse de Jupiter en précisant la méthode utilisée. Comparer cette valeur à celle fournie en fin de sujet.
- Q2.** Calculer la masse volumique moyenne de cette planète.

Pour un observateur terrestre, Jupiter est vue sous un angle  $\alpha$  qui varie suivant la distance Terre-Jupiter. Les orbites de la Terre et de Jupiter sont assimilées à des cercles ayant pour centre le Soleil, contenus dans un même plan, de rayons respectifs  $d_T$  et  $d_J$  et décrits dans le même sens. La planète Jupiter est modélisée en première approximation par une sphère de rayon  $R_J$ .



**Figure 2** – Définition de l'angle  $\alpha$

- Q3.** Calculer l'angle maximal  $\alpha_{\max}$  (en radians) sous lequel Jupiter est vue depuis la Terre.
- Q4.** Cette situation est la plus favorable à l'observation et porte le nom d'**opposition de Jupiter**. À l'aide des données fournies, évaluer la période de révolution sidérale  $T_J$  de Jupiter ainsi que la durée s'écoulant entre deux oppositions de celle-ci.

Une lunette astronomique est un système optique centré constitué d'un objectif et d'un oculaire. L'objectif est assimilé à une lentille mince convergente de centre optique  $O_1$ , de distance focale  $f'_1 = 100$  cm et de diamètre  $D_1$ . L'oculaire est une lentille mince convergente de centre optique  $O_2$ , de distance focale  $f'_2 = 10$  cm et de diamètre  $D_2$ .



**Figure 3** – Lunette astronomique

L'objectif donne d'un objet éloigné une image réelle appelée image objective. Cette dernière est observée au moyen de l'oculaire.

- Q5.** À quelle condition l'œil d'un observateur, supposé sans défaut, n'accommode-t-il pas (ne se fatigue pas) ? En déduire la position relative de l'objectif et de l'oculaire dans ce cas de figure. Ce système optique possède-t-il des foyers ? Comment se nomme un tel système optique ?
- Q6.** Rappeler les conditions de Gauss. Reproduire la **figure 3**, sans respecter les échelles, et compléter la marche du rayon incident d'angle  $\alpha$  avec l'axe optique en faisant clairement apparaître les traits de construction. Indiquer l'angle  $\alpha'$  sous lequel est vue la planète à travers l'instrument sous ces mêmes conditions.
- Q7.** Déterminer le grossissement de la lunette  $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$  en fonction de  $f_1'$  et de  $f_2'$  et calculer celui-ci. Jupiter pourra-t-elle être discernée correctement avec une telle lunette ?

## I.2 - La trajectoire de la sonde Juno

### S'échapper de la Terre

Une des prouesses technologiques du siècle dernier a été de pouvoir s'échapper de la surface de la Terre afin d'envoyer hommes, satellites et instruments de mesure hors de l'atmosphère. Lancée en 2011 depuis la Terre, la sonde Juno restera en orbite autour de Jupiter jusqu'au mois de juillet 2021.

Pour libérer un objet M de masse  $m$  de l'attraction gravitationnelle terrestre, on comprend qu'il est nécessaire de le " lancer " vers l'espace avec une vitesse suffisamment importante. La vitesse de libération de la Terre  $v_\ell$  est précisément la vitesse minimale, évaluée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, avec laquelle on doit lancer l'objet pour qu'il " s'échappe ".

- Q8.** En appliquant le théorème de l'énergie mécanique à l'objet M entre l'instant initial (M à la surface de la Terre) et l'instant final (M à l'infini), déterminer la vitesse de libération  $v_\ell$  en tenant compte de l'accélération de la pesanteur  $g$  supposée constante à la surface de la Terre. Calculer numériquement  $v_\ell$ .

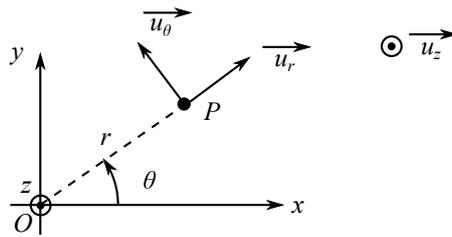
### Caractéristiques de la trajectoire

La sonde Juno devait, en tout, effectuer 36 révolutions complètes autour de Jupiter et achever sa mission en février 2018 mais un problème de moteur a contraint les ingénieurs à la laisser sur une **orbite elliptique** de 53 jours.

On assimile la sonde Juno à un point matériel P de masse  $m$  soumis uniquement à la force d'interaction gravitationnelle exercée par Jupiter de masse  $M_J$ . En outre, le centre O de Jupiter est supposé immobile dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen et la sonde est repérée par le vecteur position  $\vec{r} = \vec{OP}$ .

- Q9.** Dans quelle circonstance est-il légitime de supposer que le centre de Jupiter est immobile ? Justifier alors l'approximation galiléenne du référentiel jupiterocentrique.
- Q10.** En appliquant le théorème du moment cinétique dans le référentiel jupiterocentrique, montrer que le moment cinétique  $\vec{L}_{O,P/\mathcal{R}} = \vec{r} \wedge m \vec{v}_{P/\mathcal{R}}$  est constant au cours du temps. Conclure que le mouvement de la sonde est plan. Définir ce plan.

Il est donc plus judicieux de travailler en coordonnées cylindriques plutôt qu'en coordonnées sphériques. De plus, on choisit  $O$  comme étant l'origine du système de coordonnées cylindriques. Ce système de coordonnées est illustré sur la **figure 4**.



**Figure 4** – Paramétrage cylindrique

- Q11.** Déterminer les expressions du vecteur position  $\vec{r}$  et du vecteur vitesse  $\overrightarrow{v_{P/\mathcal{R}}}$  dans la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ .
- Q12.** On définit le vecteur  $\vec{C}$  par  $\vec{C} = \frac{\overrightarrow{L_{O,P/\mathcal{R}}}}{m}$ . En exprimant  $\vec{C}$  dans la base cylindrique orthonormée directe  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , montrer que  $r^2 \frac{d\theta}{dt}$  est une constante du mouvement que l'on exprimera en fonction de  $C = \vec{C} \cdot \vec{u}_z$ .
- Q13.** Déterminer l'énergie mécanique de la sonde et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\mathcal{E}_{m,P/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m (\dot{r})^2 + U_{\text{eff}}(r) \quad \text{avec} \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G} \frac{mM_J}{r}. \quad (1)$$

Justifier que  $\mathcal{E}_m$  se conserve.

- Q14.** Tracer l'allure de  $U_{\text{eff}}(r)$  et discuter les trajectoires possibles de la sonde en fonction de  $\mathcal{E}_m$ . On distinguera en particulier les états qualifiés de liés de ceux dits de diffusion.
- Q15.** En utilisant les données, déterminer le demi-grand axe  $a$  de l'orbite elliptique de la sonde. Exprimer, sans justifier,  $\mathcal{E}_m$  en fonction de  $a$ . En déduire une première équation liant la distance minimale  $r_{\text{min}}$ , la distance maximale  $r_{\text{max}}$  et  $a$ . Montrer également que  $r_{\text{min}}$  et  $r_{\text{max}}$  vérifient la relation suivante :

$$r_{\text{min}} r_{\text{max}} = -\frac{mC^2}{2\mathcal{E}_m}. \quad (2)$$

Ces deux relations permettent de déterminer  $r_{\text{min}}$  et  $r_{\text{max}}$ , ce que l'on ne demande pas.

Constante de la gravitation universelle .....	$\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Accélération de la pesanteur terrestre .....	$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Pouvoir de résolution de l'œil .....	$\varepsilon_{\text{œil}} = 1,5'$
Conversion .....	$1^\circ = 60' \text{ (minutes d'angle)}$
Masse de la Terre .....	$M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Masse de Jupiter .....	$M_J = 1,97 \cdot 10^{27} \text{ kg}$
Rayon de la Terre .....	$R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$
Rayon de Jupiter .....	$R_J = 7,0 \cdot 10^4 \text{ km}$
Rayon de l'orbite terrestre .....	$d_T = 1,50 \cdot 10^8 \text{ km}$
Rayon de l'orbite de Jupiter .....	$d_J = 7,80 \cdot 10^8 \text{ km}$
Période de révolution sidérale de la Terre .....	$T_T = 365,25 \text{ jours}$

△ △ △ Fin du devoir.