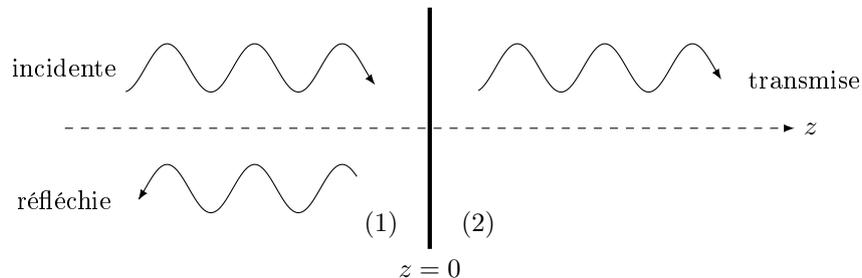


## O9-Cours

## Réflexion/transmission d'une onde EM

On considère la situation où une onde électromagnétique **plane progressive harmonique** arrive en incidence normale sur une interface entre deux milieux 1 et 2. L'étude est en tous points similaire aux précédentes illustrations des phénomènes de réflexion et transmission d'une onde sur une corde (chapitre O2), ou d'une onde sonore (chapitre O4), à la seule différence qu'elle est cette fois adaptée aux ondes électromagnétiques.



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Indice complexe</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Coefficients de réflexion et de transmission</b>	<b>2</b>
2.1	En amplitude . . . . .	2
2.2	En énergie . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Premier exemple : interface entre le vide et un plasma</b>	<b>3</b>
3.1	Coefficients de réflexion/transmission en amplitude . . . . .	3
3.2	Obtention d'une onde stationnaire par réflexion . . . . .	4
3.3	Coefficients en énergie . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Deuxième exemple : interface entre le vide et un conducteur</b>	<b>5</b>

## 1 Indice complexe

**Définition.** On définit l'indice complexe  $\underline{n}(\omega)$  d'un milieu à partir de la relation de dispersion  $\underline{k}(\omega)$  d'une onde électromagnétique dans ce milieu en écrivant

$$\boxed{\underline{k}(\omega) = \underline{n}(\omega) \frac{\omega}{c}} \quad \text{soit} \quad \underline{n}(\omega) = \frac{c}{\omega} \underline{k}(\omega)$$

avec  $c$  la célérité de la lumière dans le vide.  $\underline{n}(\omega)$  est sans dimension.

Puisque qu'on note conventionnellement  $\underline{k} = k' - i k''$  (voir le chapitre O5), on définit aussi  $n'$  et  $n''$  par

$$\boxed{\underline{n} = n' - i n''}$$

avec  $n'$  et  $n''$  des réels.

$$\begin{cases} n' &= \operatorname{Re}(\underline{n}) &= \frac{c k'}{\omega} \\ n'' &= -\operatorname{Im}(\underline{n}) &= \frac{c k''}{\omega} \end{cases}$$

**Exemple.** Dans le vide, la relation de dispersion des ondes électromagnétique est  $k = \omega / c$  donc  $\underline{n} = 1$  soit

$$n' = 1 \quad \text{et} \quad n'' = 0$$

**Propriété.** On rappelle la définition de la vitesse de phase

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k'} \quad \text{soit} \quad v_{\varphi} = \frac{c}{n'}$$

On identifie ainsi que la partie réelle de l'indice complexe  $n'$  est l'**indice de réfraction** qu'on utilise en optique par exemple dans les lois de Descartes  $n = c / v$ .

## 2 Coefficients de réflexion et de transmission

On considère la situation dépeinte en début de chapitre. Le milieu 1 à gauche a un indice complexe  $\underline{n}_1$ , et le milieu 2 à droite un indice  $\underline{n}_2$ . On envoie sur l'interface une onde incidente (depuis la gauche de l'interface) qu'on représente par son champ électrique

$$\vec{E}_i = E_{i0} e^{i(\omega t - \underline{k}_i z)} \vec{e}_x$$

Mentionnons que nous avons ainsi choisi une onde incidente polarisée rectilignement. Puisque cette onde existe dans le milieu 1 d'indice complexe  $\underline{n}_1$ , on a

$$\underline{k}_i = \frac{\omega}{c} \underline{n}_1(\omega)$$

**Propriété.** (Admise) On admet que la réflexion et la transmission **conservent la polarisation**, donc l'onde réfléchie  $\vec{E}_r$  et l'onde transmise  $\vec{E}_t$  sont suivant  $\vec{e}_x$  aussi.

On explicite leurs notations

$$\vec{E}_r = E_{r0} e^{i(\omega t + \underline{k}_r z)} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{E}_t = E_{t0} e^{i(\omega t - \underline{k}_t z)} \vec{e}_x$$

avec

$$\boxed{\underline{k}_r = \frac{\omega}{c} \underline{n}_1(\omega) = \underline{k}_i \quad \text{et} \quad \underline{k}_t = \frac{\omega}{c} \underline{n}_2(\omega)} \quad (1)$$

### 2.1 En amplitude

#### Définition des coefficients de réflexion et transmission pour le champ électrique.

Avec les notations précédentes, on définit les coefficients de réflexion  $\underline{r}$  et de transmission  $\underline{t}$  au niveau de l'interface en  $z = 0$  par

$$\vec{E}_r(z = 0, t) = \underline{r} \vec{E}_i(z = 0, t) \quad \text{et} \quad \vec{E}_t(z = 0, t) = \underline{t} \vec{E}_i(z = 0, t)$$

soit

$$\boxed{\underline{r} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}}}$$

On cherche  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$  : il nous faut donc deux équations.

**Propriété.** (Admise) On admet que le **champ électromagnétique est continu à l'interface** en  $z = 0$  entre les milieux 1 et 2. On a donc

$$\vec{E}_1(z = 0, t) = \vec{E}_2(z = 0, t)$$

$$\vec{B}_1(z = 0, t) = \vec{B}_2(z = 0, t)$$

Et par théorème de superposition, le champ à gauche est la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie, soit

$$\vec{E}_i(z = 0, t) + \vec{E}_r(z = 0, t) = \vec{E}_t(z = 0, t) \quad (2)$$

$$\vec{B}_i(z = 0, t) + \vec{B}_r(z = 0, t) = \vec{B}_t(z = 0, t) \quad (3)$$

(à droite il n'y a que le champ transmis). À partir de la définition des coefficients  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$ , on peut réécrire l'équation (2) comme

$$1 + \underline{r} = \underline{t}$$

Ensuite, il nous faut calculer les champs magnétiques associés à chacune des trois ondes. Puisque ce sont des OPPH, on peut utiliser la formule en complexe

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{k_i}{\omega} \vec{e}_z \wedge E_{i0} e^{i(\omega t - \underline{k}_i z)} \vec{e}_x = \frac{k_i E_{i0}}{\omega} e^{i(\omega t - \underline{k}_i z)} \vec{e}_y$$

et de la même manière on calcule (en utilisant que  $\vec{k}_r = -k_r \vec{e}_z$  pour l'onde réfléchie et  $\vec{k}_t = k_t \vec{e}_z$  pour l'onde transmise)

$$\vec{B}_r = -\frac{k_r E_{r0}}{\omega} e^{i(\omega t + \underline{k}_r z)} \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_t = \frac{k_t E_{t0}}{\omega} e^{i(\omega t - \underline{k}_t z)} \vec{e}_y$$

L'équation (3) conduit par conséquent à

$$\underline{k}_i - \underline{k}_r \underline{r} = \underline{k}_t \underline{t} \quad \text{soit} \quad \underline{n}_1 (1 - \underline{r}) = \underline{n}_2 \underline{t}$$

Finalement, nous avons les deux équations suivantes

$$\begin{cases} 1 + \underline{r} &= \underline{t} \\ \underline{n}_1(1 - \underline{r}) &= \underline{n}_2 \underline{t} \end{cases}$$

pour trouver les deux inconnues  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$ . Il s'agit d'un système linéaire qui se résout aisément.

### Expression des coefficients de réflexion et transmission pour le champ électrique.

On résout (*il ne s'agit pas d'apprendre ces expressions par cœur. C'est par contre un exercice classique de les redémontrer.*)

$$\underline{r} = \frac{\underline{n}_1 - \underline{n}_2}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2 \underline{n}_1}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2} \quad (4)$$

**Remarque.** On pourra ici se méfier des analogies avec le cas des ondes sonores par exemple. En effet, pour les ondes sonores les coefficients s'écrivent

$$\underline{r} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2 Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

et on voit que le rôle des indices 1 et 2 sont inversés par rapport aux coefficients des ondes électromagnétiques.

## 2.2 En énergie

### Définition des coefficients de réflexion et transmission en énergie.

On définit de même les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  au niveau de l'interface en  $z = 0$  à partir des vecteurs de Poynting de chacune des ondes

$$R = \frac{\|\langle \vec{\pi}_r \rangle\|}{\|\langle \vec{\pi}_i \rangle\|} \quad \text{et} \quad T = \frac{\|\langle \vec{\pi}_t \rangle\|}{\|\langle \vec{\pi}_i \rangle\|}$$

Remarquez que  $R$  et  $T$  sont réels par définition. Ils donnent respectivement la fraction de l'énergie incidente réfléchi (ou transmise) à l'interface. Par ailleurs, **par conservation de l'énergie**, on a toujours

$$R + T = 1$$

Par exemple, à une interface air/verre, avec une onde appartenant au domaine du visible, on a  $R = 0,04$  et  $T = 0,96$  : 4% de l'énergie est ainsi réfléchi sur une vitre! C'est peu (après tout une vitre est faite pour voir à travers!), mais suffisant pour voir son reflet sur une vitre éclairée la nuit. (*Remarquez par contre que les coefficients  $R$  et  $T$  dépendent de l'angle d'incidence (ce qu'on n'étudie pas dans ce chapitre consacré aux incidences normales uniquement) : voir la notion d'angle de Brewster dans le TP sur la polarisation.*)

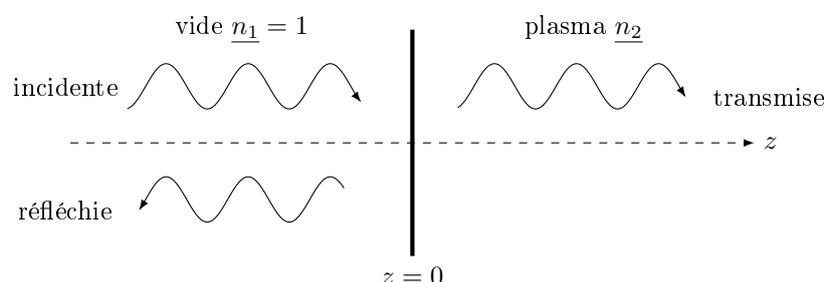
Puisque les ondes considérées sont toutes des OPPH, on peut utiliser les formules en complexe

$$\langle \vec{\pi}_i \rangle = \frac{1}{2 \mu_0} \operatorname{Re} \left( \vec{E}_i \wedge \vec{B}_i^* \right)$$

pour calculer le vecteur de Poynting incident, et idem pour  $\langle \vec{\pi}_r \rangle$  et  $\langle \vec{\pi}_t \rangle$ . Mais, contrairement aux coefficients en amplitude, on ne donnera pas les expressions générales de  $R$  et  $T$ , qui sont lourdes. On les calcule par contre sur deux exemples particuliers dans les parties suivantes.

## 3 Premier exemple : interface entre le vide et un plasma

### 3.1 Coefficients de réflexion/transmission en amplitude



Pour rappel, un plasma présente deux comportements très différents suivant que l'onde a une pulsation supérieure ou inférieure à sa pulsation plasma  $\omega_p$  (voir chapitre O7).

► **À haute pulsation (zone de transparence).** Dans le cas où  $\omega > \omega_p$ , la relation de dispersion de l'onde dans le plasma est

$$\underline{k} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

donc on identifie

$$\boxed{n_2 = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad \left( \in \mathbb{R} \quad \text{soit} \quad n'_2 = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad \text{et} \quad n''_2 = 0 \right)$$

**Remarque.** L'indice de réfraction est  $n'_2 < 1$  ici ! C'est une situation qui n'arrive jamais en optique, où l'indice est toujours supérieur à 1. C'est évidemment lié au fait que la vitesse de phase est supérieure à la célérité de la lumière dans le vide, ce qu'on a déjà commenté dans le chapitre O7.

À partir des expressions (4), on calcule alors

$$\underline{r} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

Les deux coefficients sont purements réels, donc les ondes réfléchies et transmises ne sont pas déphasées par rapport à l'onde incidente.

**Propriété.** À très haute fréquence,  $\omega \gg \omega_p$ , donc

$$\begin{cases} \underline{r} \rightarrow 0 \\ \underline{t} \rightarrow 1 \end{cases}$$

L'onde est donc **entièrement transmise** dans ce cas.

► **À basse pulsation (zone réactive).** Dans le cas où  $\omega < \omega_p$ , la relation de dispersion de l'onde dans le plasma est

$$\underline{k} = -i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$$

donc on identifie cette fois

$$\boxed{\underline{n}_2 = -i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}} \quad \left( \in i\mathbb{R} \quad \text{soit} \quad n'_2 = 0 \quad \text{et} \quad n''_2 = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \right)$$

À partir des expressions (4), on calcule alors

$$\underline{r} = \frac{1 + i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}}{1 - i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2}{1 - i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}}$$

On observe dans ce cas que  $|\underline{r}| = 1$  : l'onde réfléchie est déphasée par rapport à l'onde incidente mais de même amplitude que celle-ci.

### 3.2 Obtention d'une onde stationnaire par réflexion

Poursuivons l'étude précédente (réflexion sur un plasma avec  $\omega < \omega_p$ ) un peu plus en détail.

**Propriété.** À très basse fréquence,  $\omega \ll \omega_p$ , donc

$$\begin{cases} \underline{r} \rightarrow -1 \\ \underline{t} \rightarrow 0 \end{cases}$$

L'onde incidente est entièrement réfléchiée dans ce cas, et l'onde réfléchiée est en opposition de phase avec l'onde incidente. Ainsi, en prenant comme onde incidente

$$\vec{E}_i = E_{i0} e^{i(\omega t - k_i z)} \vec{e}_x$$

avec  $E_{i0}$  réel pour simplifier, alors dans le milieu 1 l'onde totale est par théorème de superposition

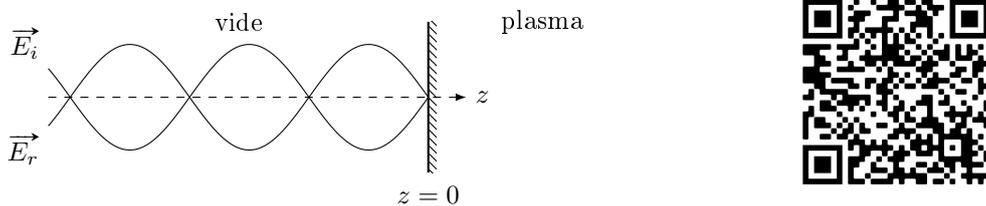
$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_i + \vec{E}_r \\ &= E_{i0} e^{i(\omega t - k_i z)} \vec{e}_x + E_{r0} e^{i(\omega t + k_r z)} \vec{e}_x \\ &= E_{i0} e^{i\omega t} (e^{-i k_1 z} - e^{i k_1 z}) \vec{e}_x \quad \text{car } E_{r0} = r E_{i0} = -E_{i0} \text{ et } k_i = k_r = k_1 = \frac{\omega}{c} \\ &= -2i \sin(k_1 z) e^{i\omega t} E_{i0} \vec{e}_x \end{aligned}$$

donc

$$\vec{E}_1 = \text{Re}(\vec{E}_1) = 2 E_{i0} \sin(k_1 z) \sin(\omega t) \vec{e}_x$$

Il s'agit d'une onde stationnaire!

**Propriété.** On retiendra qu'on obtient une **onde stationnaire** par réflexion d'une onde très basse fréquence sur un plasma. Voir animation avec le QRcode.



### 3.3 Coefficients en énergie

Après avoir discuté les coefficients de réflexion/transmission en amplitude dans le cas d'une onde arrivant sur une interface vide/plasma, on discute les coefficients en énergie.

► **À haute pulsation.** Comme mentionné précédemment,  $n_2$  est réel dans ce cas, ce qui simplifie beaucoup le calcul des vecteurs de Poynting. On obtient [À faire, en calculant d'abord les champs magnétiques avec la formule en complexe]

$$\langle \vec{\pi}_i \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i^*) = \frac{1}{2\mu_0 c} |E_{0i}|^2 \vec{e}_z$$

puis aussi

$$\langle \vec{\pi}_r \rangle = -\frac{1}{2\mu_0 c} |E_{0r}|^2 \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \langle \vec{\pi}_t \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} |E_{0t}|^2 \vec{e}_z$$

Alors, les définitions de  $R$  et  $T$  conduisent directement à

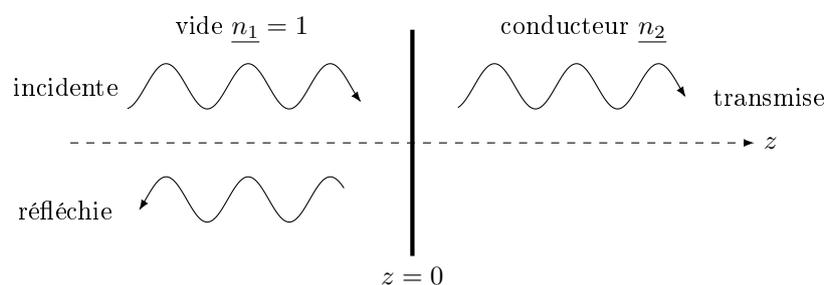
$$R = \left| \frac{E_{r0}}{E_{i0}} \right|^2 = |r|^2 \quad \text{et} \quad T = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \left| \frac{E_{t0}}{E_{i0}} \right|^2 = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} |t|^2$$

► **À basse pulsation.** Cette fois  $n_2$  est imaginaire pur. On trouve alors

$$R = 1 \quad \text{et} \quad T = 0$$

L'énergie est **entièrement réfléchiée** (comme les ondes radio de Marconi sur la ionosphère par exemple!).

## 4 Deuxième exemple : interface entre le vide et un conducteur



Pour rappel, un conducteur est caractérisé par son temps de Drüde  $\tau$  (voir chapitre O8).

► **À haute pulsation.** Dans le cas où  $\omega \gg 1/\tau$ , le conducteur se comporte comme un plasma : ce cas a donc déjà été discuté juste avant.

**Remarque.** Pour une onde du domaine visible (de la lumière donc), on a  $1/\tau \ll \omega < \omega_p$  : le conducteur se comporte donc comme un plasma dans sa zone réactive : la lumière est entièrement réfléchie ( $R = 1$  et  $T = 0$ ), c'est le principe des miroirs, qui sont fabriqués par un dépôt métallique.

► **À basse pulsation.** Dans le cas où  $\omega \ll 1/\tau$ , la relation de dispersion de l'onde dans le conducteur est

$$\underline{k} = \frac{1-i}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}} \quad \text{l'épaisseur de peau.}$$

On identifie donc

$$\boxed{n_2 = \frac{c}{\omega \delta} - i \frac{c}{\omega \delta}} \quad \text{soit} \quad n'_2 = \frac{c}{\omega \delta} = n''_2$$

alors avec l'équation (4) on obtient pour le coefficient de réflexion

$$\underline{r} = \frac{1 - \frac{c}{\omega \delta} + i \frac{c}{\omega \delta}}{1 + \frac{c}{\omega \delta} - i \frac{c}{\omega \delta}}$$

**Application.** Dans le cas où  $\omega \delta \ll c$ , c'est-à-dire

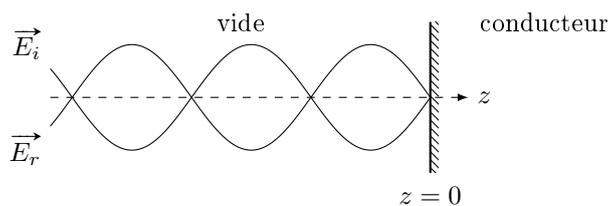
$$\sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}} \ll c$$

donc pour  $\gamma_0$  grand et  $\omega$  petit (bon conducteur à basse fréquence), on a

$$\underline{r} \approx -1 \quad \text{soit} \quad \underline{t} = 1 + \underline{r} \approx 0$$

L'onde réfléchie est donc en opposition de phase avec l'onde incidente et de même amplitude. Alors, comme on l'a discuté dans le cas vide/plasma à très basse fréquence, on obtient une onde stationnaire dans le milieu 1.

**Propriété.** On retiendra qu'on obtient aussi une **onde stationnaire** par réflexion d'une onde très basse fréquence sur un conducteur. Voir la même animation que précédemment avec le QRcode.



Notamment, sur un **conducteur parfait**  $\gamma_0 \rightarrow \infty$ , la condition très basse fréquence  $\omega \delta \ll c$  est toujours respectée : une onde électromagnétique de fréquence quelconque arrivant sur un conducteur parfait forme donc toujours une onde stationnaire.