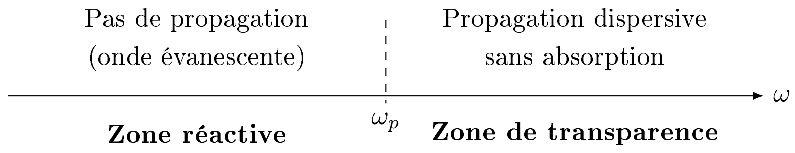
O 7/8 - TD

Correction

O7 — 04 Bilan énergétique pour une OPPH dans un plasma

1) Si $\omega > \omega_p$, le plasma est travaillé dans sa zone de transparence : **la propagation est effectivement possible**.



Le vecteur de Poynting s'exprime par

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

(Puisque son expression met en jeu un produit, il faut veiller à bien utiliser les expressions réelles des champs, car la partie réelle d'un produit n'est pas le produit des parties réelles). Il faut commencer par calculer $\vec{B}$. On a deux méthodes pour cela

— soit par l'équation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Pour cela on passe $\underline{\vec{E}}$ en réel, puis on calcule son rotationnel et on l'intègre par rapport au temps (la constante d'intégration n'est pas une onde donc elle est forcément nulle dans cet exercice où il ne règne aucun champ statique).

— soit, après avoir vérifié qu'on étudie une OPPH (c'est bien le cas ici), on peut utiliser l'équation de Maxwell-Faraday pour une OPPH

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

Ici la deuxième méthode est possible et plus rapide, donc on calcule

$$\underline{\vec{B}} = \frac{k\, \vec{e_z} \wedge E_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\, t - k\, z)}\, \vec{e_x}}{\omega} = \frac{k\, E_0}{\omega}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\, t - k\, z)}\, \vec{e_y}$$

Alors on calcule les champs réels par (k est réel dans la zone de transparence, $k = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} / c$) ,

$$\begin{cases} \vec{E} &= \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}\right) &= E_0\, \cos(\omega\, t - k\, z)\, \vec{e_x} \\ \vec{B} &= \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{B}}\right) &= \dfrac{k\, E_0}{\omega}\, \cos(\omega\, t - k\, z)\, \vec{e_y} \end{cases}$$

puis le vecteur de Poynting se calcule directement par

$$\boxed{\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{k\, E_0^2}{\mu_0\, \omega}\, \cos^2(\omega\, t - k\, z)\, \vec{e_z}}$$

qui est sans surprise selon $\vec{e_z}$, la direction de propagation.

Remarque. Si on veut la valeur moyenne, on calcule

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{k\, E_0^2}{2\, \mu_0\, \omega}\, \vec{e_z} \qquad \text{car} \qquad \langle \cos^2(\omega\, t - k\, z) \rangle = \frac{1}{2}$$

Et si on veut uniquement la valeur moyenne (c'est-à-dire sans chercher à avoir $\vec{\pi}$ avant), on peut utiliser la formule en complexe (valable seulement pour une OPPH)

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2}\, \mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right)$$

On retrouve bien sûr le même résultat (ne pas oublier de conjuguer $\underline{\vec{B}}$!).

2) On rappelle que

$$u = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E^2 + \frac{B^2}{2\,\mu_0}$$

Puisque des produits de champs sont impliqués, il faut absolument utiliser les champs réels. On calcule

$$\left\{\begin{array}{lllll} u_E & = & \dfrac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E^2 & = & \dfrac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E_0^2\,\cos^2(\omega\,t - k\,z) \\ u_B & = & \dfrac{B^2}{2\,\mu_0} & = & \dfrac{k^2\,E_0^2}{2\,\mu_0\,\omega^2}\,\cos^2(\omega\,t - k\,z) \end{array}\right.$$

D'où

$$\boxed{u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 + \frac{k^2}{\mu_0\,\omega^2}\right)\,E_0^2\,\cos^2(\omega\,t - k\,z)}$$

Par ailleurs, la puissance volumique cédée à la matière par effet Joule est

$$\mathcal{P}_V = \vec{\jmath}\cdot\vec{E}$$

Il nous faut donc déterminer la densité de courant $\vec{\jmath}$ (en réel ! À nouveau un produit est impliqué, donc pas de calcul en complexe !). On peut imaginer plusieurs méthodes pour cela. En voici trois :

— en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère

$$\vec{\jmath} = \frac{1}{\mu_0}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

— en utilisant la relation constitutive du plasma (c'est-à-dire la loi d'Ohm locale complexe)

$$\underline{\vec{\jmath}} = \underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}} = \frac{\varepsilon_0\,\omega_p^2}{\mathrm{i}\,\omega}\,\underline{\vec{E}}$$

En transposant cette loi en réel (le produit $\mathrm{i}\,\omega$ correspond à une dérivée temporelle) on détermine que

$$\frac{\partial\vec{\jmath}}{\partial t} = \varepsilon_0\,\omega_p^2\,\vec{E}$$

— toujours en utilisant la relation constitutive du plasma (c'est-à-dire la loi d'Ohm locale complexe) on a

$$\vec{\jmath} = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{\jmath}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon_0\,\omega_p^2}{\mathrm{i}\,\omega}\,\underline{\vec{E}}\right)$$

Ici la troisième méthode semble la plus rapide. On calcule

$$\vec{\jmath} = \mathrm{Re}\left(-\mathrm{i}\,\frac{\varepsilon_0\,\omega_p^2}{\omega}\,E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,z)}\,\vec{e_x}\right) = \frac{\varepsilon_0\,\omega_p^2}{\omega}\,E_0\,\sin(\omega\,t - k\,z)\,\vec{e_x}$$

et finalement

$$\boxed{\mathcal{P}_V = \vec{\jmath}\cdot\vec{E} = \frac{\varepsilon_0\,\omega_p^2}{\omega}\,E_0^2\,\sin(\omega\,t - k\,z)\,\cos(\omega\,t - k\,z)}$$

3) C'est l'équation de Poynting, qui traduit la conservation de l'énergie électromagnétique, sous la forme « la variation d'énergie est due soit à un transport d'énergie, soit à de la dissipation d'énergie ». On vérifie effectivement que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\pi} = -\frac{\varepsilon_0\,\omega_p^2}{\omega}\,E_0^2\,\sin(\omega\,t - k\,z)\,\cos(\omega\,t - k\,z) = -\mathcal{P}_V$$

(Il faut utiliser la relation de dispersion dans le plasma

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = \varepsilon_0\,\mu_0\,\left(\omega^2 - \omega_p^2\right)$$

pour aboutir au résultat voulu.)

4) Si $\omega < \omega_p$, on travaille le plasma dans sa zone réactive, une OPPH est alors une **onde évanescente**, c'est-à-dire une onde stationnaire. Il n'y a pas de propagation donc on s'attend à trouver

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \vec{0}$$

Prouvons-le par le calcul. On calcule cette valeur moyenne par la formule en complexe (on travaille bien avec une OPPH, on peut donc l'utiliser)

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right)$$

La difficulté ici est que $\underline{k}$ est imaginaire pur

$$\underline{k} = \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$$

donc

$$\underline{\vec{B}}^* = \frac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = -\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}\,\frac{E_0}{\omega}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,z)}\,\vec{e_y}$$

et donc

$$\boxed{\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{\omega\,c}\,E_0^2\,\mathrm{Re}(-\mathrm{i})\,\vec{e_z} = \vec{0}}$$

effectivement.