

O1-Cours

Introduction à l'équation de d'Alembert

Ce chapitre est décontextualisé : il ne donne que le vocabulaire, les définitions et les propriétés mathématiques à retenir sur l'équation de d'Alembert, que nous rencontrerons dans les chapitres O2, O3, O4 et O6.

Définition : Onde. C'est un champ, c'est-à-dire une fonction du temps et de l'espace, qui vérifie une équation aux dérivées partielles reliant ses dérivées temporelles et spatiales, qu'on appelle l'**équation d'onde**. Celle-ci décrit la dynamique de l'onde (au même titre que le principe fondamental de la dynamique décrit celle d'une particule).

Table des matières

1 Équation de d'Alembert unidimensionnelle	1
1.1 L'équation	1
1.2 Généralités sur ses solutions	1
2 Deux familles de solutions de l'équation de d'Alembert	2
2.1 Les ondes progressives harmoniques (ou monochromatiques, ou sinusoïdales)	2
2.2 Les ondes stationnaires	4

1 Équation de d'Alembert unidimensionnelle

1.1 L'équation

Équation de d'Alembert 1D. Soit $\psi(x, t)$ un champ 1D, l'équation de d'Alembert est l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

Cette équation est caractéristique d'un phénomène de propagation à la célérité c (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Propriétés :

- l'équation de d'Alembert est **linéaire** (donc théorème de superposition et utilisation de la notation complexe pour transformer les équations différentielles en équations algébriques);
- l'équation de d'Alembert est **réversible** (si $\psi(x, t)$ est solution alors $\psi(x, -t)$ aussi) : la propagation peut avoir lieu dans les deux sens x croissants et/ou x décroissants.

Théorème de superposition. Une équation d'onde est dite **linéaire** si, pour tout couple de solutions de l'équation d'onde ψ et φ , et pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ quelconques,

$$\alpha \psi + \beta \varphi \quad \text{est aussi solution de l'équation d'onde.}$$

(On vérifiera que l'équation de d'Alembert est effectivement linéaire). Il en résulte le théorème de superposition.

Théorème : Soit une équation d'onde linéaire. Alors

Une combinaison linéaire de fonctions solutions est encore une solution.

En d'autres termes, les ondes se superposent : si on envoie deux ondes ψ et φ , l'onde totale est $\psi + \varphi$.

1.2 Généralités sur ses solutions

L'équation de d'Alembert est une équation aux dérivées partielles, dont la forme des solutions dépend fortement des conditions aux limites et des conditions initiales (comme c'est le cas pour l'équation de la diffusion). Cependant, on peut montrer que **toute solution de l'équation de d'Alembert peut s'écrire** sous la forme

$$\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

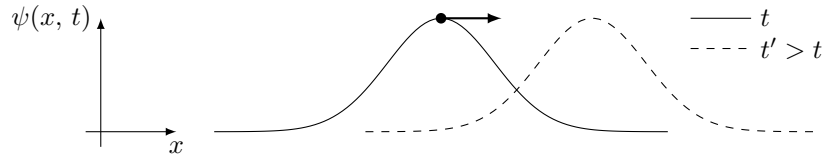
Une solution est donc la somme d'une **onde progressive dans le sens des x croissants**

$$f(x - ct) \quad \text{qu'on peut aussi écrire sous les formes} \quad f_1(ct - x), f_2\left(t - \frac{x}{c}\right), f_3\left(\frac{x}{c} - t\right)$$

et d'une **onde progressive dans le sens des x décroissants**

$$g(x + ct) \quad \text{qu'on peut aussi écrire sous la forme} \quad \tilde{g}\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

Une onde progressive se **propage sans se déformer**.



2 Deux familles de solutions de l'équation de d'Alembert

2.1 Les ondes progressives harmoniques (ou monochromatiques, ou sinusoïdales)

L'introduction de f et g ne résout pas l'équation, puisqu'il reste à trouver la forme de f et g . En pratique, on s'intéresse à une forme particulière de solutions : les **ondes progressives harmoniques**. La raison est que cette famille de solutions constitue une **base de solutions** (au sens de famille libres et génératrices). N'importe quelle solution de l'équation de d'Alembert peut donc s'écrire comme combinaison linéaire d'ondes progressives harmoniques.

Remarque : À l'inverse, toute combinaison linéaire d'ondes progressives harmoniques solutions de l'équation de d'Alembert est solution en vertu du théorème de superposition. *(Il en est de même pour une combinaison linéaire d'ondes stationnaires.)*

Onde progressive harmonique. Une onde progressive harmonique dans le sens des x croissants s'écrit

$$\psi_+(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \phi)$$

où ψ_0 est l'**amplitude de l'onde**, ω sa **pulsation**, k son **vecteur d'onde** et ϕ sa **phase à l'origine** spatiale et temporelle (à $t = 0$ et $x = 0$). Une onde progressive harmonique dans le sens des x décroissants s'écrit de la même manière

$$\psi_-(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t + kx + \phi)$$

Une onde progressive harmonique **n'existe pas** physiquement. Elle est d'amplitude constante de $t = -\infty$ jusque $t = +\infty$, et remplit tout l'espace de $x = -\infty$ à $x = +\infty$. Une telle onde a donc une **énergie infinie** et ne correspond par conséquent à rien de réel.

Remarque : Le vecteur d'onde $\vec{k}$ est bien un vecteur pour les ondes en 3D. Dans ce chapitre, sur les ondes 1D, c'est un scalaire.

Remarque : lorsqu'il est possible de choisir l'origine des temps, on peut le redéfinir par $t \rightarrow t - \phi/\omega$ on fait alors disparaître la phase à l'origine

$$\psi_+(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx).$$

Double périodicité. Une onde progressive harmonique est caractérisée par une double périodicité.

Périodicité temporelle		Périodicité spatiale	
Période	T	Longueur d'onde	λ
Fréquence	$f = \frac{1}{T}$	(Nombre d'onde)	$(\nu = \frac{1}{\lambda})$
Pulsation	$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$	Vecteur d'onde	$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \nu$

Notation complexe. Il est très utile d'utiliser la notation complexe pour les ondes progressives harmoniques. On définit la notation complexe de

$$\psi_+(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \phi) \quad \text{par} \quad \underline{\psi}_+(x, t) = \underline{\psi}_0 \exp(i(\omega t - kx))$$

où $\underline{\psi}_0 = \psi_0 e^{i\phi}$. Alors la dérivation devient un produit

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{\psi}_+ = i\omega \underline{\psi}_+ \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} \underline{\psi}_+ = -ik \underline{\psi}_+$$

On fera attention aux signes qui changent si on travaille sur

$$\underline{\psi}_+(x, t) = \underline{\psi}_0 \exp(i(kx - \omega t)) \quad \text{ou sur} \quad \underline{\psi}_-(x, t) = \underline{\psi}_0 \exp(i(\omega t + kx))$$

On retrouve l'expression réelle en prenant la partie réelle de la notation complexe

$$\psi_+(x, t) = \operatorname{Re}(\underline{\psi}_+(x, t)) = \operatorname{Re}\left(\underline{\psi}_0 \exp(i(\omega t - kx))\right)$$

⚠ L'utilisation de la notation complexe n'est possible que pour des opérations linéaires. ⚠
(notamment sommes, dérivées, intégrales,...). Cela s'explique par le fait que la partie réelle est elle-même linéaire

$$\operatorname{Re}(\underline{f} + \underline{g}) = \operatorname{Re}(\underline{f}) + \operatorname{Re}(\underline{g}) \quad \text{par contre} \quad \operatorname{Re}(\underline{f} \times \underline{g}) \neq \operatorname{Re}(\underline{f}) \times \operatorname{Re}(\underline{g})$$

donc on ne cherchera pas à calculer $f \times g = \operatorname{Re}(\underline{f}) \times \operatorname{Re}(\underline{g})$ par la partie réelle des ondes complexes :

$$f \times g \neq \operatorname{Re}(\underline{f} \times \underline{g})$$

Relation de dispersion. On appelle relation de dispersion la relation liant ω et k **pour une onde progressive harmonique** vérifiant une équation d'onde.

Par exemple, si on considère l'équation de d'Alembert,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

alors pour que une onde progressive harmonique $\underline{\psi}_0 \exp(i(\omega t - kx))$ soit solution il faut [Montrez-le!]

$$\omega^2 = c^2 k^2 \quad \text{soit} \quad \omega = ck \quad (\omega > 0)$$

La relation de dispersion $\omega(k)$ est **équivalente à l'équation d'onde**.

La relation de dispersion conduit ici à la relation bien connue $\lambda = cT$, mais il faut bien comprendre que cette relation est spécifique à l'équation de d'Alembert.

Vitesse de phase et de groupe. Connaissant la relation de dispersion $\omega(k)$, on définit la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g de l'onde progressive harmonique par

$$v_\varphi(\omega) = \frac{\omega(k)}{k} \quad \text{et} \quad v_g(\omega) = \frac{d\omega(k)}{dk} \quad (\text{en m} \cdot \text{s}^{-1})$$

lorsque k est réel. Le cas où k est complexe sera étudié au chapitre O5.

Exemple : Pour l'équation de d'Alembert, on calcule $v_\varphi = c$ et $v_g = c$.

Le théorème de superposition assure que la somme de deux ondes progressives harmoniques solutions de l'équation de d'Alembert est encore une solution. On admet par ailleurs que les ondes progressives harmoniques sont une base de solutions.

Solution générale de l'équation de d'Alembert. Une onde progressive dans le sens des x croissants solution de l'équation de d'Alembert se décompose dans la base des ondes progressives (dans le sens des x croissants) harmoniques

$$f(x - ct) = \sum_{\omega} \psi_{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x + \phi_{\omega}\right) \quad (\text{somme d'ondes progressives harmoniques})$$

avec ψ_ω et ϕ_ω les coefficients de la décomposition. En notation complexe

$$f(x - ct) = \operatorname{Re} \left(\sum_{\omega} \underline{\psi}_{\omega} \exp \left(i \left(\omega t - \frac{\omega}{c} x \right) \right) \right)$$

La décomposition de f en somme d'ondes harmoniques constitue la **transformation de Fourier** (spatio-temporelle) de f .

De même une onde progressive dans le sens des x décroissants solution de l'équation de d'Alembert se décompose dans la base des ondes progressives (dans le sens des x décroissants) harmoniques.

Conclusion : Une onde solution de l'équation de d'Alembert peut toujours se décomposer en une somme d'une onde progressive croissante et d'une onde progressive décroissante, qui toutes deux se décomposent à leur tour en somme d'ondes progressives harmoniques croissantes et décroissantes respectivement.

2.2 Les ondes stationnaires

Les ondes stationnaires sont une autre famille de solutions de l'équation de d'Alembert.

Ondes stationnaires. Une onde stationnaire est un champ de la forme

$$\psi(x, t) = f(x) g(t)$$

C'est une onde qui **ne se propage pas**, mais qui oscille « sur place ».

Cette famille de solutions est particulièrement adaptée aux **géométries confinées**. Dans ces cas effectivement les conditions aux limites imposent souvent une certaine valeur de ψ aux bords pour tout t .

Une onde stationnaire qui vérifie l'équation de d'Alembert doit vérifier

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{g}(t)}{g(t)}$$

Cette relation traduit l'égalité entre une fonction de x et une fonction de t . Les deux sont ainsi forcément constantes

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = A$$

Pour ne pas avoir $g(t)$ qui diverge exponentiellement à temps longs, il faut $A < 0$. On écrit donc $A = -k^2$. Les fonctions f et g vérifient donc toutes les deux une équation d'oscillateur harmonique

$$f''(x) + k^2 f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{g}(t) + c^2 k^2 g(t) = 0$$

et on obtient alors que

$$\psi(x, t) = f(x) g(t) = \psi_0 \cos(kx + \alpha) \cos(\omega t + \beta) \quad \text{avec} \quad \omega = ck$$

qui s'écrit aussi

$$\psi(x, t) = \left(\psi_1 \cos(kx) + \psi_2 \sin(kx) \right) \left(\psi_3 \cos(\omega t) + \psi_4 \sin(\omega t) \right)$$

Onde stationnaire vérifiant l'équation de d'Alembert. Nous venons de montrer qu'une onde stationnaire solution de l'équation de d'Alembert s'écrit

$$\psi(x, t) = f(x) g(t) = \psi_0 \cos(kx + \alpha) \cos(\omega t + \beta) \quad \text{avec} \quad \omega = ck$$

Remarque : Dans le cas des ondes stationnaires, la relation $\omega = ck$ ne s'appelle pas « relation de dispersion ».

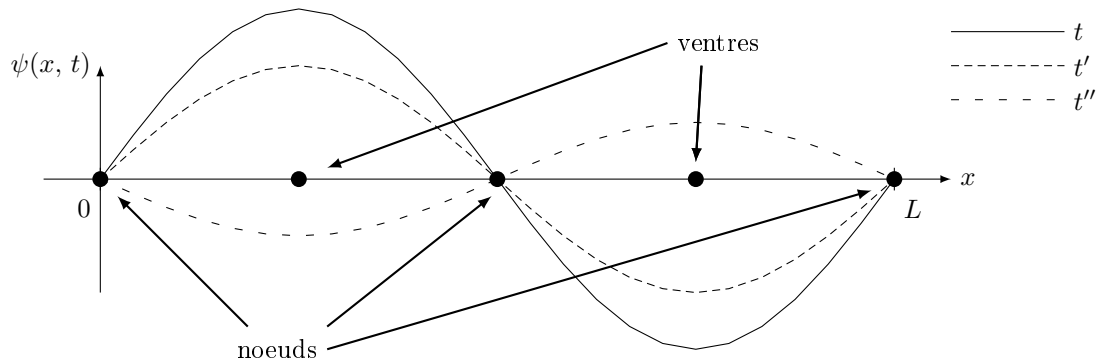


Figure : Onde stationnaire. Avec les conditions aux limites $\psi(x=0, t) = \psi(x=L, t) = 0$ pour tout t .

Noeuds et ventres. On considère l'onde stationnaire solution de l'équation de d'Alembert

$$\psi(x, t) = f(x)g(t) = \psi_0 \cos(kx + \alpha) \cos(\omega t + \beta) \quad \text{avec} \quad \omega = ck$$

Cette onde oscille (temporellement) « sur place », avec une amplitude $\psi_0 \cos(kx + \alpha)$ qui dépend de x .

On appelle **noeuds** de l'onde les positions x pour lesquelles l'amplitude de l'oscillation temporelle est minimale. Elles correspondent aux x pour lesquels

$$\cos(kx + \alpha) = 0$$

On appelle **ventres** de l'onde les positions x pour lesquelles l'amplitude de l'oscillation temporelle est maximale. Elles correspondent aux x pour lesquels

$$\cos(kx + \alpha) = \pm 1$$

Deux noeuds (ou ventres) successifs sont séparés de $\lambda/2$. Un noeud et un ventre adjacents sont séparés de $\lambda/4$.

Le théorème de superposition assure que la somme de deux ondes stationnaires solutions de l'équation de d'Alembert est encore une solution. On admet par ailleurs que les ondes stationnaires sont également une base de solutions, comme les ondes progressives harmoniques.

Solution générale de l'équation de d'Alembert. Une onde solution de l'équation de d'Alembert peut donc être décomposée dans la base des ondes stationnaires

$$\psi(x, t) = \sum_{\omega} \psi_{\omega} \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \alpha_{\omega}\right) \cos(\omega t + \beta_{\omega})$$

avec ψ_{ω} , α_{ω} et β_{ω} les coefficients de la décomposition.

Exercice. Considérations mathématiques.

- 1) Montrer que $f(x - ct)$ est solution de l'équation de d'Alembert, pour f quelconque.
- 2) Montrer que si $\psi(x, t)$ est solution, alors $\psi_{-}(x, t) = \psi(x, -t)$ est aussi solution. Cela prouve la réversibilité de la propagation d'une onde régie par l'équation de d'Alembert.
- 3) Montrer que $\underline{\psi}_0 \exp(i(\omega t - kx))$ est solution si et seulement si $\omega = ck$.