M1-Cours

Révisions de mécanique

Ce chapitre de rappels de mécanique se contente de redonner de manière synthétique les définitions et théorèmes généraux vus en première année. On n'y revient ni sur la dynamique d'une particule chargée dans un champ électromagnétique, ni sur la dynamique d'un point matériel dans un champ de force centrale conservative. Ces deux développements très importants sont malgré tout bien sûr à connaître.

Table des matières

1 Cinématique du point matériel

Déf : Référentiel. C'est l'observateur, noté $(\mathcal{R})$. En pratique c'est un solide (définissant trois directions de l'espace) muni d'une horloge (définissant le temps).

Déf : Point matériel. Sa description ne nécessite que la donnée de sa position $(x,\, y,\, z)$. Il est de volume nul.

Voir la fiche « Systèmes de coordonnées » pour l'expression de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

Déf : Masse. Quantité scalaire positive, et indépendante du référentiel, qui caractérise les propriétés d'inertie du point matériel ($\approx$ la difficulté à mettre en mouvement). Elle s'exprime en kg.

Déf : Quantité de mouvement. La quantité de mouvement d'un point matériel M de masse m dans un référentiel $(\mathcal{R})$ est donnée par

$$\boxed{\vec{p}(M/\mathcal{R}) = m\,\vec{v}(M/\mathcal{R})}$$

Déf : Moment cinétique. Soit un référentiel $(\mathcal{R})$. Le moment cinétique, par rapport à un point O fixe dans $(\mathcal{R})$, d'un point matériel M de masse m est donné par

$$\boxed{\vec{L}_O(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v}(M/\mathcal{R})}$$

Déf : Moment cinétique scalaire. Soit un référentiel $(\mathcal{R})$. Le moment cinétique scalaire, par rapport à un axe Δ porté par un vecteur unitaire $\vec{u}$ fixe dans $(\mathcal{R})$, d'un point matériel M de masse m est donné par

$$L_\Delta(M/\mathcal{R}) = \left(\overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v}(M/\mathcal{R})\right) \cdot \vec{u}$$

Le moment cinétique scalaire est une grandeur algébrique, il peut être positif ou négatif.

Déf : Énergie cinétique. Soit un point matériel M, de masse m, animé d'une vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ dans le référentiel $(\mathcal{R})$. L'énergie cinétique du point M est donnée par

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2(M/\mathcal{R})}$$

2 Cinématique du solide

Déf : Solide. C'est un ensemble continu de points matériels tels que pour tout couple A et B de points appartenant au solide, on a $||\overrightarrow{AB}|| = \text{cste}$ (sous-entendu, le solide est un ensemble *indéformable* de points matériels). La description de la cinématique d'un solide nécessite, en plus de la donnée des coordonnées (x_G, y_G, z_G) de son centre de masse G, la donnée de son vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}$.

Il y a **seulement deux cas au programme** :

• Dans le cas d'une **translation**, tous les points du solide ont la même vitesse égale à celle du centre de masse.
• Dans le cas d'une **rotation autour d'un axe fixe**, la vitesse d'un point est donnée par $\overrightarrow{v} = \omega\, d\, \overrightarrow{e_\theta}$ avec ω la vitesse angulaire de rotation telle que le vecteur rotation du solide soit $\overrightarrow{\Omega} = \omega\, \overrightarrow{u}$; d la distance du point à l'axe de rotation ; et $\overrightarrow{e_\theta}$ le vecteur orthoradial.

Déf : Centre de masse. Le centre de masse G d'un système de points matériels M_i de masse m_i est donné par

$$m_{\text{tot}}\, \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i\, \overrightarrow{OM_i} \qquad \text{avec} \qquad m_{\text{tot}} = \sum_i m_i$$

C'est donc le barycentre, pondéré par les masses, des points matériels.
En particulier, pour un solide $\mathcal{S}$ de masse volumique ϱ, qui est un ensemble continu de points matériels, on écrit

$$m_{\text{tot}}\, \overrightarrow{OG} = \iiint_{\mathcal{S}} \varrho\, \overrightarrow{OM_i}\, \mathrm{d}V \qquad \text{avec} \qquad m_{\text{tot}} = \iiint_{\mathcal{S}} \varrho\, \mathrm{d}V$$

Déf : Quantité de mouvement. La quantité de mouvement d'un solide $\mathcal{S}$ de masse totale m_{tot} dans un référentiel $(\mathcal{R})$ est donnée par

$$\boxed{\overrightarrow{p}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m_{\text{tot}}\, \overrightarrow{v}(G/\mathcal{R}) \qquad \text{avec} \qquad G \ \text{ le centre de masse du solide}}$$

Déf : Moment cinétique scalaire d'un solide en rotation autour d'un axe fixe. Dans le cas d'un solide $\mathcal{S}$ en rotation, à la vitesse angulaire $\omega(t)$, autour d'un axe Δ porté par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ fixe dans $(\mathcal{R})$, le moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Δ du solide est donné par

$$\boxed{L_\Delta(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = J_\Delta\, \omega}$$

avec J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ (en kg·m^2), qui rend compte de la répartition des masses par rapport à l'axe de rotation. Le vecteur rotation du solide est $\overrightarrow{\Omega} = \omega \overrightarrow{u}$.

Déf : Énergie cinétique d'un solide en translation. Soit un solide $\mathcal{S}$, de masse totale m_{tot}, animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}(G/\mathcal{R})$ dans le référentiel $(\mathcal{R})$. L'énergie cinétique du solide $\mathcal{S}$ est donnée par

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\, m_{\text{tot}}\, v^2(G/\mathcal{R})}$$

Déf : Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe. Soit un solide $\mathcal{S}$, de moment d'inertie J_Δ par rapport à un axe Δ, en rotation à la vitesse ω autour de Δ fixe dans le référentiel $(\mathcal{R})$. L'énergie cinétique du solide $\mathcal{S}$ est donnée par

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\, J_\Delta\, \omega^2}$$

3 Dynamique du point matériel

3.1 Lois de Newton

1ère loi de Newton. (principe d'inertie) Il existe au moins un référentiel $(\mathcal{R})$, dit galiléen, par rapport auquel tout point matériel M isolé conserve son vecteur quantité de mouvement au cours du temps.

2ème loi de Newton. (principe fondamental de la dynamique) Dans un référentiel galiléen, le taux de variation du vecteur quantité de mouvement d'un point matériel est égal à la somme des forces qui s'exercent sur ce point

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{F_i}} \qquad \left(= m\, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \ \text{si la masse du point matériel est constante} \right)$$

3ème loi de Newton. (principe de l'action et de la réaction) Si un point matériel A exerce une force $\overrightarrow{F}_{A\to B}$

sur un point matériel B, alors le point matériel B exerce sur le point matériel A la force

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{B\to A} = -\overrightarrow{F}_{A\to B}}$$

De plus, les forces sont dirigées selon l'axe AB.

3.2 Force, puissance d'une force, travail d'une force et énergie potentielle

Déf : Forces. Grandeurs vectorielles qui apparaissent dans la seconde loi de Newton. Elles sont indépendantes du référentiel. Elles s'expriment en newton N.

Exemples de forces :
- **Poids :** $\overrightarrow{P} = m\,\overrightarrow{g}$, avec $|\overrightarrow{g}| = 9,8$ m·s^{-2} en France ;
- **Rappel d'un ressort :** $\overrightarrow{F} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{e_x}$ lorsque $\overrightarrow{e_x}$ est dirigé dans le sens de l'allongement du ressort ;
- **Force de Lorentz :** $\overrightarrow{F} = q\,(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$;
- **Frottements fluides :** $\overrightarrow{F} = -\gamma\,\overrightarrow{v}$ lorsque le Reynolds est faible ($\approx$ à faible vitesse) ;
- **Frottements fluides :** $\overrightarrow{F} = -\beta\,v\,\overrightarrow{v}$ lorsque le Reynolds est grand ($\approx$ lorsque la vitesse est élevée).

Déf : Puissance d'une force. Soit un point matériel animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})$ dans un référentiel $(\mathcal{R})$ et soumis à une force $\overrightarrow{F}$. La puissance P de la force $\overrightarrow{F}$ sur le point matériel est donnée par

$$\boxed{P = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})}$$

Déf : Travail d'une force. Soit un point matériel soumis à une force $\overrightarrow{F}$. Le travail élémentaire δW de la force $\overrightarrow{F}$ lors d'un déplacement infinitésimal $\mathrm{d}\overrightarrow{r}$ du point matériel est donné par

$$\boxed{\delta W = \overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r} \qquad \Big(= P\,\mathrm{d}t\Big)}$$

Pour un déplacement fini d'un point A à un point B, le travail W s'écrit

$$W = \int_A^B \overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}$$

Dans le cas général, le travail dépend du chemin suivi pour aller de A à B. Lorsqu'il n'en dépend pas, on dit que la force $\overrightarrow{F}$ est **conservative**. Dans ce cas, elle **dérive d'une énergie potentielle**, c'est à dire qu'elle peut s'écrire sous la forme d'un gradient

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_p} \qquad \left(= -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\,\overrightarrow{e_x} \quad \text{dans le cas unidimensionnel}\right)$$

ce qui définit l'énergie potentielle E_p. Toujours dans le cas où $\overrightarrow{F}$ est à force conservative, on calcule

$$W = \int_A^B \overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r} = -\int_A^B \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_p\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r} = -\int_A^B \mathrm{d}E_p = -\big(E_p(B) - E_p(A)\big) = -\Delta E_p$$

Le travail reçu est donc l'opposé de la variation d'énergie potentielle du point matériel.

Exemples d'énergie potentielle :
- **Poids :** $E_p = m\,g\,z$ lorsque l'axe z est dirigé vers le haut ;
- **Rappel d'un ressort :** $E_p = \frac{1}{2}\,k\,(\ell - \ell_0)^2$;
- **Frottements fluides :** ce sont des forces non conservatives, elles ne dérivent pas d'une énergie potentielle (c'est évident car elles dépendent de la vitesse, et pas seulement de la position).
- **Gravitation :** $\overrightarrow{F} = -\frac{G\,M\,m}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}$ alors $E_p = -\frac{G\,M\,m}{r}$.

3.3 Moment d'une force et théorème du moment cinétique

Déf : Moment d'une force. Soit un point matériel M soumis à une force $\overrightarrow{F}$. Le moment de la force $\overrightarrow{F}$ par rapport à un point O fixe dans $(\mathcal{R})$ est défini par

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{F}}$$

Théorème du moment cinétique : Soit un point matériel M soumis à des forces $\vec{F_i}$. Soit un point O fixe dans le référentiel galiléen $(\mathcal{R})$. Le théorème du moment cinétique stipule que

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O(M/\mathcal{R})}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F_i})}$$

3.4 Théorèmes énergétiques

Théorème de la puissance cinétique. Soit un point matériel M soumis à des forces $\vec{F_i}$. On se place dans un référentiel galiléen $(\mathcal{R})$. Le théorème de la puissance cinétique stipule que

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i P_i} \qquad \text{où } P_i \text{ est la puissance de la force } \vec{F_i}.$$

Théorème de l'énergie cinétique. Soit un point matériel M soumis à des forces $\vec{F_i}$. On se place dans un référentiel galiléen $(\mathcal{R})$. Le théorème de l'énergie cinétique stipule que, lors d'un déplacement d'un point A vers un point B, on a

$$\boxed{\Delta E_c = \sum_i W_i}$$

où W_i est le travail de la force $\vec{F_i}$ lors du déplacement entre A et B.

Théorème de l'énergie mécanique. Soit un point matériel M soumis à des forces $\vec{F_i}$ conservatives, et à des forces $\vec{F_j}$ non conservatives. On se place dans un référentiel galiléen $(\mathcal{R})$. Le théorème de l'énergie mécanique stipule que

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} + \sum_i \frac{\mathrm{d}E_{p,i}}{\mathrm{d}t} = \sum_j P_j^{nc}}$$

où $E_{p,i}$ est l'énergie potentielle associée à la force conservative i, et P_j^{nc} est la puissance de la force non conservative $\vec{F_j}$. **Si le point matériel n'est soumis qu'à des forces conservatives, son énergie mécanique est conservée.**

4 Dynamique du solide

Lors de l'étude de la dynamique d'un solide, on distingue les forces extérieures, exercées par un système extérieur au solide, et les forces intérieures, exercées par un point du solide sur les autres points du solide.

Remarque. Par ailleurs, en dynamique du point le principe fondamental de la dynamique et le théorème du moment cinétique sont équivalents : il y a trois degrés de liberté (x, y, z) et ce sont des équations vectorielles, par conséquent l'un ou l'autre suffit pour déterminer la loi du mouvement. En mécanique du solide, il y a la rotation ω en plus, et par conséquent il faut utiliser les deux théorèmes, qui ne sont plus équivalents.

4.1 Théorème du centre de masse

Théorème du centre de masse. Soit un référentiel galiléen $(\mathcal{R})$. Soit un solide $\mathcal{S}$ de masse totale m_{tot}, soumis à des forces extérieures $\vec{F}_{\text{ext},i}$. Le théorème du centre de masse stipule que

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}(\mathcal{S}/\mathcal{R})}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext},i}}$$

Seules les forces extérieures interviennent (l'idée de la démonstration repose sur l'annulation deux à deux des forces intérieures du fait de la troisième loi de Newton).

4.2 Couple et théorème du moment cinétique

Déf : Couple. Un couple est un ensemble de deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ tel que la somme des forces est nulle $\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$, mais dont le moment par rapport à un point O est non nul. Les points d'applications M_1 et M_2 sont alors forcément différents. On a

$$\mathcal{M}_O(\overrightarrow{F_1}) + \mathcal{M}_O(\overrightarrow{F_2}) = \overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \overrightarrow{F_2} = -\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{F_2}$$

Le moment du couple est ainsi indépendant du point O et on l'appelle seulement « le couple ».

Théorème du moment cinétique. Soit un référentiel galiléen $(\mathcal{R})$. Soit un solide $\mathcal{S}$ soumis à des forces extérieures $\vec{F}_{\text{ext},i}$, et un axe Δ porté par un vecteur unitaire $\vec{u}$ fixe dans $(\mathcal{R})$. Le théorème du moment cinétique stipule que

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_\Delta(\mathcal{S}/\mathcal{R})}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext},i})}$$

Seules les forces extérieures interviennent (l'idée de la démonstration repose à nouveau sur l'annulation deux à deux des forces intérieures du fait de la troisième loi de Newton). Ne pas oublier de tenir compte des couples !

4.3 Théorèmes énergétiques

Théorème de la puissance cinétique. Soit un solide $\mathcal{S}$ soumis à des forces extérieures $\overrightarrow{F_i}$. On se place dans un référentiel galiléen $(\mathcal{R})$. Le théorème de la puissance cinétique stipule que

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i P_i}$$

où P_i est la puissance de la force extérieure $\overrightarrow{F_i}$.

Théorème de l'énergie cinétique. Soit un solide $\mathcal{S}$ soumis à des forces extérieures $\overrightarrow{F_i}$. On se place dans un référentiel galiléen $(\mathcal{R})$. Le théorème de l'énergie cinétique stipule que, lors d'un déplacement d'un point A vers un point B, on a

$$\boxed{\Delta E_c = \sum_i W_i}$$

où W_i est le travail de la force extérieure $\overrightarrow{F_i}$ entre lors du déplacement entre A et B.

Théorème de l'énergie mécanique. Soit un solide $\mathcal{S}$ soumis à des forces extérieures $\overrightarrow{F_i}$ conservatives, et à des forces extérieures $\overrightarrow{F_j}$ non conservatives. On se place dans un référentiel galiléen $(\mathcal{R})$. Le théorème de l'énergie mécanique stipule que

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} + \sum_i \frac{\mathrm{d}E_{p,i}}{\mathrm{d}t} = \sum_j P_j^{nc}}$$

où $E_{p,i}$ est l'énergie potentielle du solide associée à la force extérieure conservative i, et P_j^{nc} est la puissance de la force extérieure non conservative $\overrightarrow{F_j}$. **Si le solide n'est soumis qu'à des forces conservatives, son énergie mécanique est conservée.**

Remarque : À nouveau **les forces intérieures n'interviennent pas dans les théorèmes énergétiques appliqués aux solides**. Ici néanmoins, la nullité de la puissance des forces intérieures a une origine plus subtile que juste la troisième loi de Newton. Elle repose pleinement sur le fait qu'on étudie un solide, c'est-à-dire un système indéformable de points matériels. Pour un système déformable, les puissances des forces intérieures ne seraient pas nulles ! (alors qu'elles n'interviendraient toujours pas dans le théorème du centre de masse et le théorème du moment cinétique).

5 Forces de frottement solide - Lois de Coulomb

Dans le cas d'un cas d'un contact, supposé ponctuel, entre un solide et une surface, la surface exerce sur le solide une force

$$\vec{F} = T\,\vec{e_t} + N\,\vec{e_\perp}$$

avec $\vec{e_\perp}$ le vecteur perpendiculaire à la surface, orienté de la surface vers le solide, et $\vec{e_t}$ un vecteur tangent à la surface et au mouvement. T et N sont des grandeurs algébriques.

Déf : Vitesse de glissement. On définit la vitesse de glissement $\vec{v_g}$, dans un référentiel d'étude $(\mathcal{R})$, comme la différence entre la vitesse du point appartenant à la surface et en contact avec le solide, et la vitesse du point appartenant au solide et en contact avec la surface.

Lois de Coulomb pour le frottement solide. Les lois de Coulomb stipulent que :

- lorsque la vitesse de glissement $\vec{v_g}$ est nulle, alors

$$\boxed{|T| \leqslant f\,|N|}$$

- lorsqu'il y a glissement ($\vec{v_g} \neq \vec{0}$), alors

$$\boxed{|T| = f\,|N| \qquad \text{et} \qquad \text{le sens de } \vec{T} \text{ est opposé à la vitesse de glissement}}$$

avec f le coefficient de frottement, qui dépend des surfaces en contact. f est typiquement de l'ordre de $0,5$.

Les lois de Coulomb sont à comprendre comme ceci :

Hypothèse	Équation	Vérification
Glissement	$\|T\| = f\,\|N\|$	$\vec{v_g} \neq \vec{0}$ et $\vec{T}$ opposée à $\vec{v_g}$
Non-glissement	$\vec{v_g} = \vec{0}$	$\|T\| \leqslant f\,\|N\|$

Exemple de raisonnement. On commence par supposer qu'il y a non-glissement. On pose alors $\vec{v_g} = \vec{0}$. On déroule les expressions données par les théorèmes de la dynamique. À la fin, on vérifie que les résultats sont compatibles avec la vérification $|T| \leqslant f\,|N|$. Si on trouve au contraire des expressions de T et N telles que $|T| > f\,|N|$, c'est qu'alors l'hypothèse de non-glissement était fausse, et il faut recommencer l'étude dynamique en supposant cette fois le glissement, c'est-à-dire en posant $|T| = f\,|N|$.

Remarque : Partant d'un système qui ne glisse pas ($|T| \leqslant f\,|N|$), le glissement se déclenche lorsque $|T| = f\,|N|$.

Remarque : Par ailleurs, il y a **décollement du solide** de la surface lorsque N s'annule.

Applications directes du cours

1) Pour un point matériel, démontrer le théorème du moment cinétique.

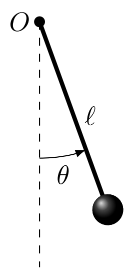
2) Pour un point matériel, démontrer les trois théorèmes énergétiques.

3) On considère un point matériel évoluant dans un champ de force centrale. Montrer que son moment cinétique est conservé le long de sa trajectoire. Comment s'appelle la loi qui s'en déduit ?

4) On considère un point matériel relié à un ressort de raideur k. Démontrer que la force de rappel dérive d'une énergie potentielle.

5) On considère un disque solide d'axe Δ et de moment d'inertie J par rapport à cet axe, initialement au repos. Le disque est soumis à partir de $t = 0$ à un couple Γ constant sur cet axe. Quelle est l'évolution du disque ?

6) Obtenir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ repérant un pendule pesant par rapport à la verticale. On notera J le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe $(O, \vec{e_z})$.



7) Si la tige du pendule précédemment étudié est sans masse, et qu'ainsi toute la masse m du pendule est portée par la masselotte terminale, que vaut le moment d'inertie J ?