

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP**

PHYSIQUE**Vendredi 4 mai : 8 h - 12 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées
--

L'énoncé de cette épreuve comporte 16 pages, dont 3 pages d'annexe.

Questionnements et découvertes autour de l'atome le plus simple de l'univers

Dans ce sujet, on propose d'étudier quelques étapes clés de l'étude des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

Le problème est constitué de 7 parties, quasiment indépendantes, même s'il y a un fil conducteur entre elles. Il est conseillé au candidat de faire une première lecture rapide du sujet afin d'en retirer une vue d'ensemble. Les paragraphes rédigés en italique donnent des explications permettant de situer chaque partie dans son contexte scientifique historique, avec leurs hypothèses d'étude.

Les constantes fondamentales intervenant dans le problème sont rappelées ci-dessous avec leurs valeurs numériques données avec 5 chiffres significatifs :

- charge élémentaire : $e = 1,6022 \cdot 10^{-19}$ C
- charge de l'électron : $-e$
- charge du proton : $+e$
- masse de l'électron : $m_e = 9,1094 \cdot 10^{-31}$ kg
- masse du proton : $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27}$ kg
- rayon de Bohr : $a_B = 5,2919 \cdot 10^{-11}$ m
- vitesse de la lumière dans le vide : $c = 2,9979 \cdot 10^8$ m.s⁻¹
- perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H.m⁻¹
- permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,8542 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹
- constante de Planck : $h = 6,6261 \cdot 10^{-34}$ J.s
- constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0546 \cdot 10^{-34}$ J.s
- constante énergétique de Rydberg : $R_y = \frac{m_e}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 = 2,1799 \cdot 10^{-18}$ J
- l'électron-volt, unité d'énergie : $1 \text{ eV} = 1,6022 \cdot 10^{-19}$ J

On donne l'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \text{ et l'expression de deux intégrales et leur valeur :}$$

$$- \text{ pour tout réel } r_0 > 0 : \int_0^\infty r \exp(-r/r_0) dr = r_0^2$$

$$- \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}.$$

Même si elles ne sont pas systématiquement rappelées dans l'énoncé, le candidat utilisera à son initiative dans cette liste toute constante qu'il jugera nécessaire pour répondre aux questions posées.

Les applications numériques demandées seront réalisées avec 4 chiffres significatifs pour les questions Q1 à Q17, puis avec 3 chiffres significatifs à partir de la question Q18.

Partie I – Modèle historique de Bohr de l'atome d'hydrogène (1913)

Dans le modèle planétaire de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron (vu comme ponctuel en M) tourne autour de son proton (lui aussi ponctuel et supposé immobile en O) en décrivant une orbite circulaire de rayon $r = OM$ (**figure 1**). On note $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire normal au plan de l'orbite.

L'électron est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) comme indiqué sur la **figure 1** et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est la base locale correspondante.

On néglige l'interaction gravitationnelle entre l'électron et le proton.

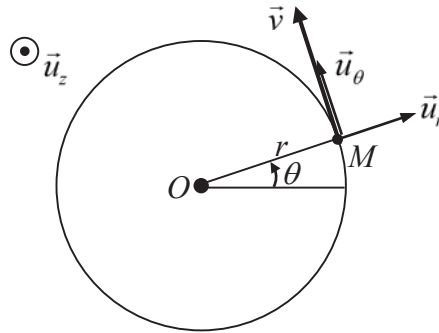


Figure 1 – Trajectoire circulaire de l'électron autour du proton supposé immobile

- Q1.** Rappeler l'expression de la force électrique exercée par le proton sur l'électron.
- Q2.** Par l'application du théorème de la quantité de mouvement, déduire la norme v de la vitesse de l'électron en fonction entre autres du rayon r de l'orbite.
- Q3.** Rappeler l'expression de l'énergie potentielle électrostatique E_p de l'électron. Montrer que l'énergie cinétique E_c de l'électron vérifie : $E_c = -E_p / 2$.
- Q4.** Exprimer la norme L du moment cinétique en O de l'électron en fonction de r , m_e , e , et ε_0 .

En 1913, Bohr a postulé que L est un multiple entier de $\hbar$ en posant $L = n\hbar$, où n est un entier naturel strictement positif et où $\hbar$ est la constante de Planck réduite. Pour de tels états du modèle de Bohr, dits stationnaires, l'électron, en mouvement circulaire uniforme, bien qu'accélééré, ne rayonne pas d'énergie.

- Q5.** De l'égalité $L = n\hbar$, déduire que la relation de quantification du rayon r_n de l'orbite caractérisée par l'entier n s'écrit sous la forme $r_n = a_B n^2$, avec a_B le rayon de Bohr, qu'on exprimera en fonction de m_e , e , ε_0 et $\hbar$.
- Q6.** En déduire que l'énergie mécanique E_n de l'électron vaut $E_n = -\frac{R_y}{n^2}$, avec R_y la constante énergétique de Rydberg.
- Q7.** Quelle est la signification du rayon de Bohr ?
Donner la valeur de a_B en picomètres et celle de R_y en électron-volts.

Q8. Donner la vitesse v_n de l'électron sur l'orbite caractérisée par l'entier n . On l'exprimera en fonction de n , R_y et m_e .

Donner la valeur numérique de v_1 . Le mouvement de l'électron vous semble-t-il relativiste ? Justifier.

Partie II – Une résolution simplifiée de l'atome de Bohr par l'équation de Schrödinger (1926)

On rappelle l'équation de Schrödinger pour une particule non relativiste de masse m décrite par la fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$ dans un champ d'énergie potentielle $E_p(\vec{r})$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + E_p(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t)$$

où $\vec{r}$ désigne le vecteur position d'un point M quelconque de l'espace (M est repéré par ses coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques, d'origine O) et Δ est l'opérateur Laplacien.

Q9. On s'intéresse aux états stationnaires d'énergie E de l'électron de l'atome d'hydrogène : on note $\psi(\vec{r}, t) = \kappa(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}$.

Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps concernant la partie spatiale de la fonction d'onde $\kappa(\vec{r})$ (On n'explicitera à ce stade ni la fonction énergie potentielle ni le Laplacien).

Afin de simplifier la résolution de l'équation obtenue en **Q9**, nous nous limiterons à considérer que l'électron n'est spatialement détectable qu'en un lieu de points formé de cercles dans le plan d'équation $z = 0$, concentriques au point O où se trouve le proton (supposé ponctuel) et avec des rayons de valeurs quantifiées. Les points M où est évaluée la fonction d'onde sont ainsi repérés par leurs coordonnées polaires ($r = R, \theta$), d'axe Oz , avec r contraint à prendre des valeurs R discrètes (que l'on cherche à déterminer). $\kappa(\vec{r})$ est alors une fonction continue de la variable θ : on la notera $\kappa(\theta)$.

Q10. Expliciter la fonction énergie potentielle électrostatique de l'électron évoquée à la question **Q3** et pour laquelle on impose $r = R$.

Q11. Sachant que $E_p = 2E$ (résultat déduit de **Q3**), montrer que $\kappa(\theta)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\hbar^2}{2m_e R^2} \frac{d^2 \kappa(\theta)}{d\theta^2} = E \kappa(\theta).$$

Résoudre cette équation pour les états liés de l'électron en posant $\eta^2 = \frac{m_e R e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}$.

Q12. En remarquant que $\kappa(\theta + 2\pi) = \kappa(\theta)$, déterminer une relation de quantification des valeurs de R , puis des énergies E . Commenter ces résultats.

Partie III – Spectre de raies de l'hydrogène

Cette partie n'est pas indépendante des précédentes.

*On rappelle que l'émission de lumière par un atome est due aux transitions entre deux états stationnaires (stationnaires au sens de Bohr (**partie I**), ou, au choix, au sens de la mécanique quantique (**partie II**)).*

Q13. Quelle est l'énergie du photon émis lors de la transition entre un état atomique d'énergie E_{sup} vers un état d'énergie plus faible E_{inf} ?

Montrer dans le cas de l'atome d'hydrogène que la longueur d'onde $\lambda_{nn'}$ de la raie d'émission correspondant à la transition de l'état d'énergie E_n vers l'état d'énergie $E_{n'}$ (avec $n' < n$) vérifie

la relation de Ritz $\frac{1}{\lambda_{nn'}} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$. On explicitera la constante R_H en fonction de R_y , h et c .

Q14. Calculer les valeurs numériques des longueurs d'onde des quatre premières raies d'émission de la série de Balmer prédites par la formule de Ritz, c'est-à-dire les raies correspondant aux transitions des états $n = 3, 4, 5, 6$ vers l'état $n' = 2$ (représentées et nommées dans la partie gauche de la **figure 2** de la **partie IV**, page 6).

Le **tableau 1** ci-dessous indique les valeurs expérimentales établies en 1885.

Recopiez ce tableau sur votre copie en le complétant par les valeurs numériques précédemment calculées.

Les intervalles d'incertitudes expérimentales englobent-ils les valeurs de Ritz ?

Nom de la raie	H $_{\alpha}$	H $_{\beta}$	H $_{\gamma}$	H $_{\delta}$
λ_{Ritz}				
λ_{exp} (valeurs de 1885)	656,3 nm $\pm$ 0,3 nm	486,1 nm $\pm$ 0,2 nm	434,0 nm $\pm$ 0,2 nm	410,2 nm $\pm$ 0,2 nm

Tableau 1 – Longueurs d'onde des premières raies de la série de Balmer

Partie IV – Corrections relativistes de Sommerfeld (1916) : introduction de la constante de structure fine

*Le modèle de Bohr fut un premier succès dans la prévision du spectre d'émission de l'hydrogène. Mais les progrès de la spectroscopie ont rapidement conduit à observer que certaines raies vues initialement comme monochromatiques présentaient en fait une structure fine sous la forme de multiplets de raies voisines. C'est le cas, par exemple, de la raie H $_{\alpha}$ qui fut observée comme un doublet par Michelson et Morley dès 1887, mais qui, plus tard, se révéla être formée de raies plus nombreuses. Sur la partie droite de la **figure 2** (page 6) se trouve la carte actuelle simplifiée des niveaux d'énergie et des multiplets de raies qui composent la raie H $_{\alpha}$ (noter le changement d'échelle: facteur de zoom $\times 10^4$ par rapport au spectre de la série de Balmer à gauche).*

La première explication théorique de ces multiplets a été fournie par Sommerfeld en 1916 grâce à un traitement relativiste amélioré du modèle de Bohr utilisant la constante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$, nommée constante de structure fine.

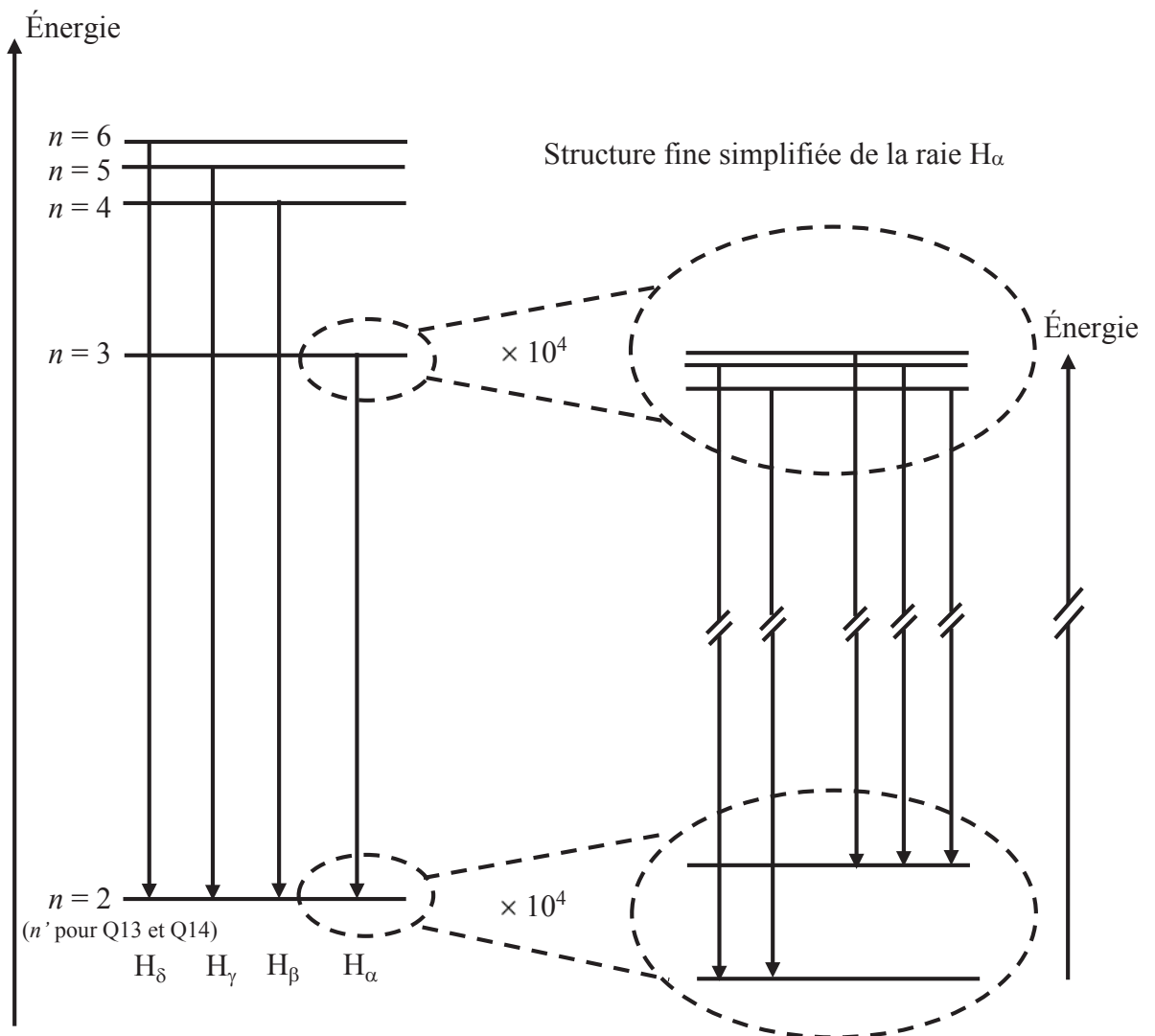


Figure 2 – Premières raies de la série de Balmer (à gauche) et structure fine (simplifiée) de la raie H α (à droite)

Q15. En explicitant R_y dans l'expression de ν_n obtenue en **Q8**, donner α en fonction de ν_1 et de c . En déduire la dimension de α .

Q16. Donner la valeur numérique de α , puis celle de son inverse $1/\alpha$ (que l'on utilise bien plus volontiers).

Au terme de son calcul, Sommerfeld aboutit à l'expression des niveaux d'énergie $E_{n,l}$ suivants, indicés par deux entiers (n, l) avec $n \geq 1$ et $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$:

$$E_{n,l} = -\frac{R_y}{n^2} \left(1 + \alpha^2 \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \right) \text{ où } \alpha \text{ est la constante de structure fine introduite ci-dessus.}$$

Trois années auparavant, Bohr avait trouvé (question **Q6**) l'expression suivante à un seul indice entier : $E_n = -\frac{R_y}{n^2}$.

Q17. Commenter la formule de Sommerfeld en liaison avec la formule de Bohr et la faible valeur de α .

Combien de sous-niveaux d'énergie ce calcul prévoit-il pour les niveaux $n = 2$ et $n = 3$ de la formule de Bohr ?

Q18. Ces sous-niveaux constituent la structure fine de la raie H_α . En reproduisant sur votre copie la partie droite de la **figure 2** (page 6), identifier chacun de ces niveaux d'énergie par leurs indices (n, l) respectifs.

En déduire, en fonction de R_y et α , l'expression de l'écart $\Delta E_f = E_{2,1} - E_{2,0}$ entre les deux sous-niveaux $n = 2$.

Calculer la valeur numérique de ΔE_f en électron-volts.

Q19. On rappelle que le nombre d'onde σ d'une radiation est l'inverse de sa longueur d'onde.

Exprimer en fonction de h , c , et ΔE_f , l'écart $\Delta\sigma = \sigma_a - \sigma_b$ des nombres d'onde σ_a et σ_b des radiations émises lors des deux transitions (a) et (b) suivantes :

(a) : obtenue par désexcitation depuis le niveau $(n = 3, l = 1)$ vers le niveau $(n = 2, l = 0)$

(b) : obtenue par désexcitation depuis le niveau $(n = 3, l = 1)$ vers le niveau $(n = 2, l = 1)$.

Calculer $\Delta\sigma$ en cm^{-1} , unité habituelle des spectroscopistes.

Immédiatement après l'annonce du résultat négatif de leur expérience consacrée à confirmer l'existence de l'éther luminifère, Michelson et Morley mentionnèrent dans une publication l'observation de la raie H_α comme un doublet de nombre d'onde moyen $\sigma_m = 15\,237,40\,\text{cm}^{-1}$ et d'écart spectral $\Delta\sigma_{\text{exp}} = 0,360\,\text{cm}^{-1}$ (valeurs expérimentales de 1887).

Q20. De quelle couleur est ce doublet ? Calculer son écart relatif en nombre d'onde $\Delta\sigma_{\text{exp}}/\sigma_m$.

Comparer cet écart relatif à celui du doublet jaune du sodium ($\lambda_1 = 589,0\,\text{nm}$ et $\lambda_2 = 589,6\,\text{nm}$).