

DS 3 Physique – PC 2020/2021

Vendredi 20/11/2020, durée 4h. Calculatrice autorisée.

Problème 1 – CCP TPC 2015

Propulseur de plongée

Les plongeurs ont parfois recours à un propulseur de plongée ou scooter leur permettant de se propulser plus rapidement et d'explorer davantage les fonds marins.

Celui-ci est simplement composé d'une hélice comme pour les bateaux à propulsions et peut faire atteindre aux plongeurs une vitesse maximale de $10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Le scooter embarque une hélice animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Ox .

L'étude est faite dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ lié à l'axe de l'hélice.

On considère un tube de courant possédant la symétrie de révolution autour de Ox et s'appuyant sur les pales de l'hélice. Ce tube de courant définit une surface fermée, constituée de la surface latérale du tube S_{lat} et des sections droites amont et aval S_1 et S_2 . On suppose la pression à l'extérieur de ce tube de courant uniforme et égale à P_e .

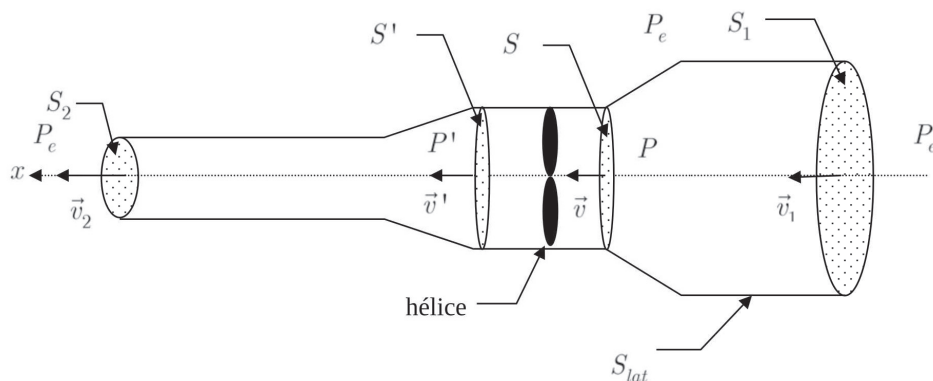
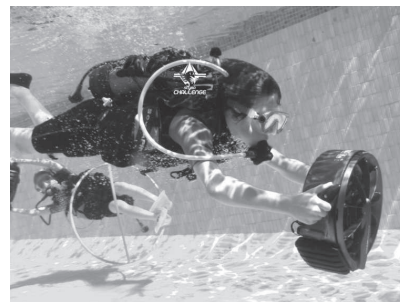


FIGURE B2 – Tube de courant

- Sur la surface S_1 , la vitesse du fluide est uniforme et égale à $v_1 \vec{e}_x$;
- sur la surface S_2 , elle est égale à $v_2 \vec{e}_x$.

Au voisinage de l'hélice, on considère deux sections S et S' d'aires sensiblement égales $S \simeq S'$:

- sur la surface S , la vitesse est $v \vec{e}_x$ et la pression P ;
- sur la surface S' , la vitesse est $v' \vec{e}_x$ et la pression P' .

Au voisinage proche de l'hélice, entre S et S' , l'écoulement est perturbé et il existe une discontinuité de la pression de part et d'autre de l'hélice.

L'eau de mer sera supposée comme étant un fluide parfait et incompressible, en écoulement stationnaire. On négligera l'influence de la pesanteur.

- 17) Donner les relations reliant S_1 , v_1 , S , v , S' , v' , S_2 et v_2 . Que conclure sur v et v' ?
- 18) Exprimer la pression P en fonction de P_e , ρ , v_1 et v puis P' en fonction P_e , ρ , v_2 et v .

- 19) Par un bilan de quantité de mouvement dans le volume délimité par S_1 , S_2 et S_{lat} , déterminer la résultante $\vec{F}$ des efforts exercés par l'hélice sur le fluide en fonction de ρ , S , v , $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$; commenter le sens de $\vec{F}$.
- 20) Evaluer $\vec{F}$ par ailleurs, en travaillant sur un bilan de quantité de mouvement dans le volume compris entre S et S' . Commenter le signe de F et justifier l'allure des lignes de courant représentées.
- 21) En déduire la relation suivante reliant les vitesses : $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$.
- 22) Evaluer la puissance $\mathcal{P}_f$ fournie par l'hélice au fluide et mesurée dans $\mathcal{R}'$:
- 22.a) à partir de $\vec{F}$;
- 22.b) en appliquant le principe de conservation de l'énergie à un système convenable.
On exprimera $\mathcal{P}_f$ en fonction de v_1 , v_2 et du débit massique D_m circulant dans le tube de courant représenté.

Le plongeur est alors animé d'une vitesse uniforme $\vec{U} = -U\vec{e}_x$ prise par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen. Dans ce référentiel, le fluide en amont de l'hélice est immobile et possède une vitesse $\vec{W} = W\vec{e}_x$ en aval de celle-ci.

- 23) A l'aide de la loi de composition des vitesses, exprimer les vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en fonction de $\vec{U}$ et/ou de $\vec{W}$.
- 24) Exprimer alors la force $\vec{F}$ en fonction de D_m , v et U . En déduire que la force de poussée $\vec{F}$ et la puissance $\mathcal{P}_f$ sont reliées par la relation suivante :

$$\mathcal{P}_f^2 - FUP_f - \frac{F^3}{2S\rho} = 0. \quad (1)$$

En réalité, le plongeur subit une force de frottement due à la viscosité de l'eau qui s'oppose au mouvement et appelée traînée. Son expression est donnée par $T_r = \frac{1}{2}C_x\rho S_{\text{eff}}U^2$, où S_{eff} est la surface efficace du plongeur (surface de celui-ci projetée dans le plan perpendiculaire au mouvement) et C_x le coefficient de traînée.

On supposera que les résultats précédents restent en première approximation valables.

- 25) Le plongeur avançant à une allure constante, quelle est la relation entre F et T_r ?
Résoudre l'équation (1) et montrer que la solution s'écrit :

$$\mathcal{P}_f = \frac{C_x\rho S_{\text{eff}}}{4} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{C_x S_{\text{eff}}}{S}} \right] U^3.$$

- 26) Application numérique : le propulseur utilisé présente les indications suivantes :



RS3	
Batterie	Li-Ion 22.2 V / 4 HA
Puissance	220 W
Autonomie	60 minutes
Km/h	5
Vitesse	2
Temps de recharge	3 heures
Profondeur	30 mètres
Prix	899 €

Diamètre de l'hélice : $D = 30 \text{ cm}$

Pour un plongeur dans l'eau à la vitesse considérée, on a $C_x = 0,09$ et $S_{\text{eff}} = 0,12 \text{ m}^2$.
 On rappelle que $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
 Calculer $\mathcal{P}_f$. Commenter la valeur de la puissance obtenue.

Problème 2 – CCP PC 2009

II.1 Ondes stationnaires le long d'une corde tendue

Une fine corde métallique homogène, quasi-inextensible et sans raideur, de masse linéique μ , est soumise à une tension d'équilibre T . Ses déformations dans le plan (x, y) sont décrites par une fonction de hauteur $y = h(x, t)$. Dans tout le problème, les déformations de la corde par rapport à l'axe horizontal sont supposées suffisamment faibles pour que :

- l'angle $\alpha(x, t)$ que fait la courbe h avec l'horizontale soit un infiniment petit d'ordre 1, tout comme la dérivée $\partial h / \partial x$.
- les déplacements d'un point matériel lié à la corde n'aient qu'une composante verticale, les déplacements horizontaux étant négligeables.

Les extrémités de la corde sont dénommées A et B, d'abscisse respective x_A et x_B . Le milieu de la corde est noté C, d'abscisse x_C (Figure II.1). Tout au long du problème, on négligera les effets de pesanteur devant les forces de tension de la corde.

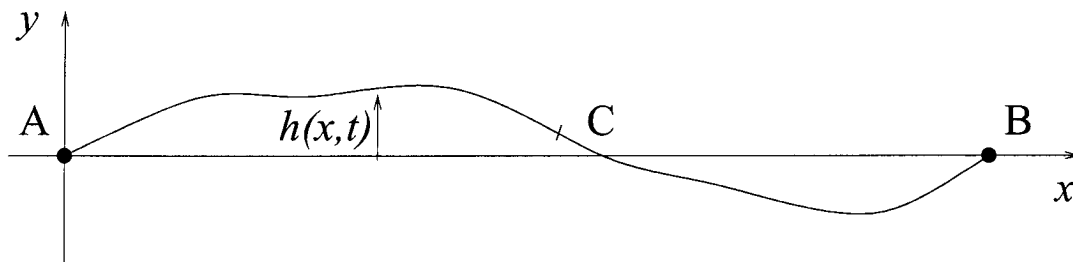


Figure II.1

- II.1.1

Soit un point O d'abscisse x_O situé dans l'intervalle $[AB]$ ($x_A < x_O < x_B$). La partie de la corde située à droite du point O ($x > x_O$) exerce à chaque instant sur la partie de la corde située à sa gauche une certaine force $\vec{F}(x_O, t)$.

Comment s'exprime, en fonction de T et d'une dérivée de $h(x, t)$, la composante verticale (suivant y) de cette force $\vec{F}$?

- II.1.2

Etablir, dans le cadre des hypothèses énoncées ci-dessus, l'équation de d'Alembert vérifiée par $h(x, t)$. Exprimer la célérité c associée en fonction des paramètres μ et T .

- II.1.3

Peut-on observer des discontinuités spatiales de la dérivée $\partial h / \partial x$ en des points autres que A et B ? Justifier votre réponse.

- II.1.4

La corde est fixée en ses deux extrémités A et B à une hauteur nulle, soit $h(x_A, t) = 0$ et $h(x_B, t) = 0$. La longueur de la corde entre ces deux points est $2L$, et l'on choisit l'origine du

repère de façon à avoir $x_A = 0$ et $x_B = 2L$.

On recherche les ondes stationnaires de vibration de la corde sous la forme :

$$h(x, t) = Z \sin(kx + \phi) \cos(\omega t)$$

où Z est une amplitude arbitraire.

Donner, en la démontrant, la relation existant entre ω , k et c .

- II.1.5

Les valeurs admissibles de k (norme du vecteur d'onde) forment une suite de valeurs discrètes k_n , où $n = 1, 2, 3 \dots$ est entier positif.

Donner l'expression des k_n admissibles, des pulsations propres ω_n et des fréquences f_n associées.

Comment choisir la phase ϕ ?

- II.1.6

Tracer soigneusement l'allure de la déformation associée au mode de vibration fondamental k_1 , telle qu'on pourrait l'observer à l'aide, par exemple, d'une caméra rapide ou d'une lampe stroboscopique.

Tracer de la même façon l'allure des déformations associées à la première, deuxième et troisième harmonique (respectivement k_2, k_3, k_4).

Compter et faire figurer sur votre schéma, à chaque fois, le nombre de "noeuds" et de "ventres" associés à ces modes de vibration.

- II.1.7

On peut montrer que l'énergie mécanique **par unité de longueur** $e(x, t)$ associée à l'onde est égale à :

$$e(x, t) = \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Calculer la valeur moyenne temporelle $\langle e \rangle$ en un point quelconque x de la corde, pour le mode de vibration fondamental.

- II.1.8

En déduire l'énergie totale associée à la vibration du mode fondamental. On exprimera le résultat en fonction de la tension T de la corde, de sa demi-longueur L et de l'amplitude Z des vibrations.

Application numérique : Que vaut l'amplitude Z des vibrations lorsque l'énergie totale du mode est égale à 0,1 J, avec $L = 1$ m, $T = 100$ N ?

II.2 Perturbation par une masse

On accroche à la corde une perle de masse m , située exactement au milieu de la corde, au point d'abscisse $x_C = L$. Cette masse est supposée ponctuelle (sans épaisseur).

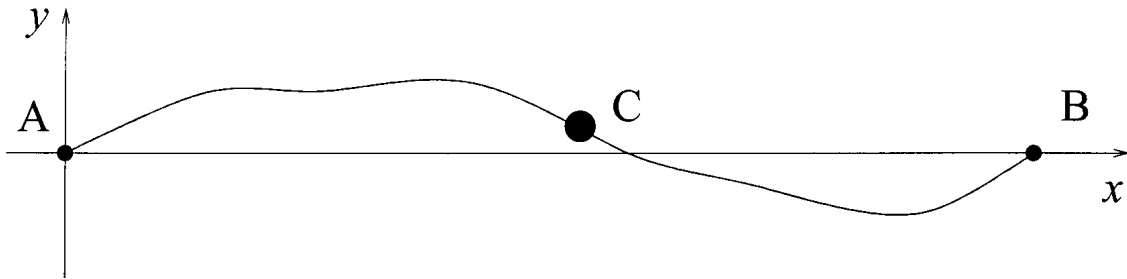


Figure II.2

- II.2.1

En considérant les schémas tracés à la question II.1.6, déterminer les modes de vibration susceptibles d'être modifiés (changement de fréquence propre) par la présence de la masse m . Déterminer de la même façon les modes qui ne devraient pas être modifiés par la présence de la masse.

- II.2.2

En présence de cette masse supposée ponctuelle, les dérivées à gauche et à droite de $\partial h / \partial x$ ne sont pas nécessairement égales (la dérivée $\partial h / \partial x$ est discontinue en L).

En appliquant le principe fondamental de la dynamique (PFD), trouver une relation entre T , m , $\partial^2 h / \partial t^2(L, t)$ (accélération suivant y de la masse), $\partial h / \partial x(L^-, t)$ et $\partial h / \partial x(L^+, t)$, où l'on a défini :

$$\partial h / \partial x(L^-, t) = \lim_{x \rightarrow L^-} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$$

lorsque x tend vers L par valeur inférieure, et :

$$\partial h / \partial x(L^+, t) = \lim_{x \rightarrow L^+} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$$

lorsque x tend vers L par valeur supérieure.

Illustrer votre relation par un schéma.

- II.2.3

On recherche le mode de vibration fondamental sous la forme d'une fonction symétrique par rapport à L , c'est-à-dire telle que $h(x, t) = h(2L - x, t)$, et donnée sur l'intervalle de gauche $0 \leq x < L$ par :

$$h(x, t) = \sin(Kx) \cos(\omega t)$$

où K est un vecteur d'onde à déterminer, et ω et K vérifient la relation de dispersion habituelle. Montrer que les conditions aux limites imposent désormais la condition de quantification suivante sur les valeurs possibles de ω et K :

$$\cotan(KL) = \frac{\cos(KL)}{\sin(KL)} = \frac{m\omega^2}{2KT}$$

- II.2.4

Tracer la courbe représentative de $\cotan(x)$ sur l'intervalle $]0, 3\pi[$.

Montrer que si la masse m est nulle, on retrouve comme cas particulier de l'équation ci-dessus le vecteur d'onde k_1 de la fréquence de vibration de la corde homogène.

- II.2.5

Lorsque m est faible, on recherche un développement limité à l'ordre 1 en m du vecteur inconnu K :

$$K \simeq k_1 + \beta m$$

où β est une constante à déterminer en fonction de ω , c , T et L . On utilisera en particulier le développement limité suivant de la fonction cotangente, valable pour de petites valeurs de ε :

$$\cotan\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \simeq -\varepsilon$$

K est-il plus grand ou plus petit que k_1 ?

- II.2.6

Déduire de la question précédente le changement relatif de fréquence $\Delta f_1/f_1$ du mode de vibration fondamental de la corde lorsque l'on passe du vecteur k_1 au vecteur K . Exprimer le résultat en fonction de m , μ et L .

La détermination expérimentale de la nouvelle fréquence de vibration permet donc de **déterminer la masse m** déposée sur la corde.

Application numérique : Calculer m lorsque $L = 1$ m, $T = 100$ N, $\mu = 10^{-2}$ kg.m⁻¹, $\Delta f_1 = -1$ Hz.

II.3 Une application : la microbalance à quartz

Les oscillations transversales d'un cristal de quartz taillé peuvent être mesurées et entretenues à l'aide de deux fines électrodes métalliques placées de part et d'autre de la lame (propriété piézoélectrique). La face supérieure du quartz est libre, et par un calcul généralisant celui de la question précédente, on montre que toute masse m déposée sur la face supérieure du quartz modifie sa fréquence de résonance f_1 en raison de la loi :

$$\Delta f_1 = -\frac{2mf_1^2}{\rho_q c_q S}$$

connue sous le nom d'équation de Sauerbrey, dans laquelle ρ_q désigne la masse volumique du quartz, c_q la célérité des ondes ultrasonores associées à cette vibration, et S la surface du cristal vibrant.

Données :

- masse volumique du quartz : $\rho_q = 2650$ kg.m⁻³
- célérité des ondes de vibration du quartz : $c_q = 3340$ m.s⁻¹

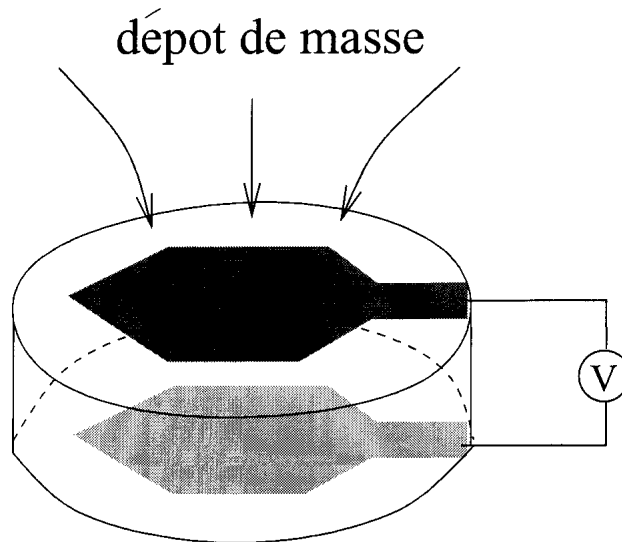


Figure II.3

Le phénomène ci-dessus est mis à profit pour mesurer de façon très sensible la variation de masse déposée sur la surface vibrante : c'est le principe de la **microbalance à quartz**, représentée sur la figure II.3. Toute masse m déposée sur la surface entraîne une diminution de la fréquence de résonance du quartz, qui peut être déterminée précisément à l'aide d'un circuit électronique approprié.

- II.3.1

Montrer que l'équation obtenue à la question II.2.6 est équivalente à l'équation de Sauerbrey, à condition de remplacer la masse linéique μ de la corde par celle $\rho_q S$ du cristal. En l'absence d'autre source d'amortissement, le cristal de quartz peut-être considéré comme un circuit résonant de fréquence $f_1 = 5$ MHz, et de facteur de qualité élevé $Q = 2 \times 10^6$. Que vaut alors la largeur en fréquence de la bande de résonance du cristal ? Illustrer le résultat par un schéma.

- II.3.2

En se basant sur la largeur de la courbe de résonance, estimer la variation minimale de fréquence Δf_1 qu'un tel dispositif est susceptible de détecter. En déduire la valeur minimale du rapport m/S (masse déposée par unité de surface) ainsi détectable.

Application numérique : donner la sensibilité, en nanogrammes, d'une microbalance à quartz dont la surface de vibration est $S = 0,1 \text{ cm}^2$.

Remarque : Dans la pratique, on utilise pour la mesure des fréquences de vibration harmoniques $f_3, f_5, \dots$ plus élevées que f_1 .

Indications :

II.1.8 il faut lire « en déduire la valeur moyenne temporelle de l'énergie totale » ;

II.2.2 on négligera le poids de la masse dans le bilan des forces ;

II.2.3 il faut lire $h(x, t) = Z \sin(Kx) \cos(\omega t)$;

II.2.4 pour la représentation graphique, on pourra remarquer que $\cotan(x) = -\tan(x - \pi/2)$.

△ △ △ Fin du devoir.