

# DS 2 Physique – PC 2020/2021

Vendredi 16/10/2020. Durée 4h. Calculatrice autorisée.

## Problème 1 – Agrégation externe de chimie 2006

On rappelle l'équation d'Euler :

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -1/\rho \mathbf{grad} P + \mathbf{g}$$

et la relation de Bernoulli :  $P / \rho + g z + v^2 / 2 = \text{constante}$

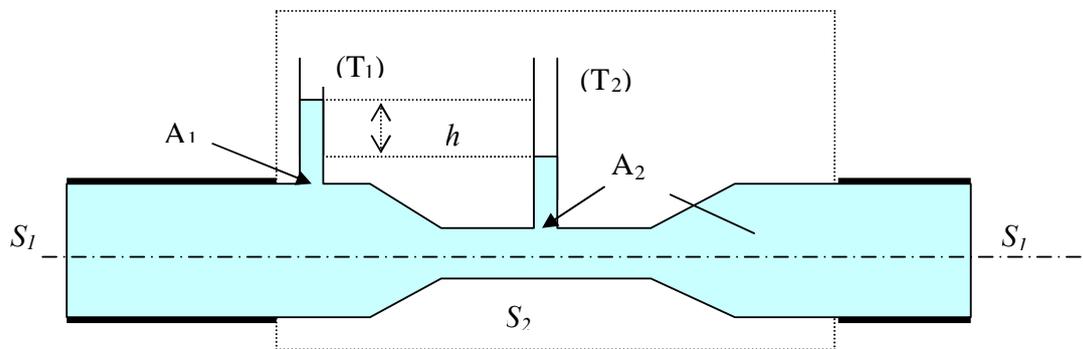
3.1. Citer les conditions qui doivent être remplies pour que cette dernière relation puisse être applicable.

3.2. Faire une interprétation énergétique de la relation de Bernoulli.

3.3. Par une analyse dimensionnelle, montrer que cette relation est homogène.

On insère dans une canalisation de section  $S_1$  un tube dit « de Venturi » de section  $S_2$ . Le fluide s'écoulant en régime permanent dans la canalisation est de l'eau. On considère que les vitesses sont uniformes dans chaque section droite du tube.

L'axe de la canalisation est horizontal et deux tubes verticaux ( $T_1$ ) et ( $T_2$ ) jouent le rôle de capteurs de pression. On observe une dénivellation de hauteur  $h$  entre les surfaces libres de l'eau des tubes ( $T_1$ ) et ( $T_2$ ) ouverts à l'air.



*Tube de Venturi*

On note  $P_0$  la pression atmosphérique,  $P_1$  la pression et  $v_1$  la vitesse de l'écoulement en amont du tube de Venturi.  $A_1$  est un point à la base du tube ( $T_1$ ) et  $A_2$  est un point à la base du tube ( $T_2$ ).

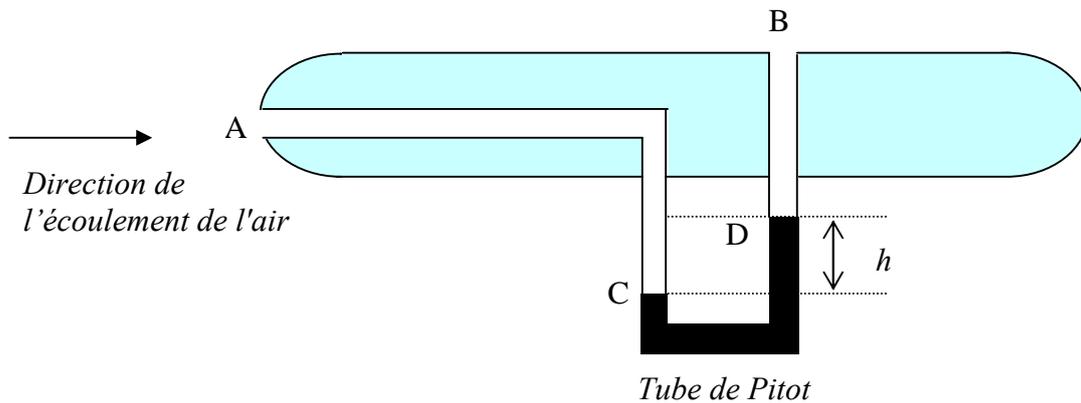
4.1. Les vitesses d'écoulement du fluide sont notées  $v_2$  dans le tube de section  $S_2$  et  $v_3$  en aval du tube de Venturi. Exprimer ces vitesses en fonction de la constante de pesanteur  $g$ , de  $h$ , de  $S_1$  et de  $S_2$ .

4.2. Exprimer le débit volumique  $D_v$  en fonction de  $g$ ,  $h$ ,  $S_1$  et  $S_2$ .

4.3. Application numérique :  $S_1 = 50 \text{ cm}^2$  ;  $S_2 = 30 \text{ cm}^2$  ;  $h = 1,25 \text{ m}$ .

4.4. Quel est l'intérêt pratique d'un tel dispositif ?

Les tubes de Pitot sont utilisés en aéronautique pour mesurer la vitesse d'un avion. Ils sont constitués d'un tube très fin placé parallèlement à la direction de l'écoulement de l'air. Les orifices A et B permettent des prises de pressions.



On considère que l'air est un fluide parfait, incompressible et en écoulement stationnaire, et que le dispositif ne perturbe pas l'écoulement.

La masse volumique, la vitesse et la pression de l'air loin du tube sont notées respectivement  $\rho_0$ ,  $v_0$  et  $P_0$ .

5.1. Représenter l'allure de la ligne de courant  $C_A$  qui aboutit en A et l'allure de  $C_B$  qui longe le tube en B.

5.2. Déterminer les vitesses  $v_A$  en A et  $v_B$  en B ainsi que les pressions  $P_A$  et  $P_B$ . Quel est le nom donné au point A ?

5.3. Dans le manomètre, on mesure une dénivellation  $h$  entre les deux niveaux de liquide de masse volumique  $\rho_l$ . En déduire la vitesse d'écoulement  $v_0$  de l'air.

A.N. :  $h = 24 \text{ cm}$ . ;  $\rho_l = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

## Problème 2 – CCP PC 2017

**Données.** On donne le gradient en coordonnées cylindriques

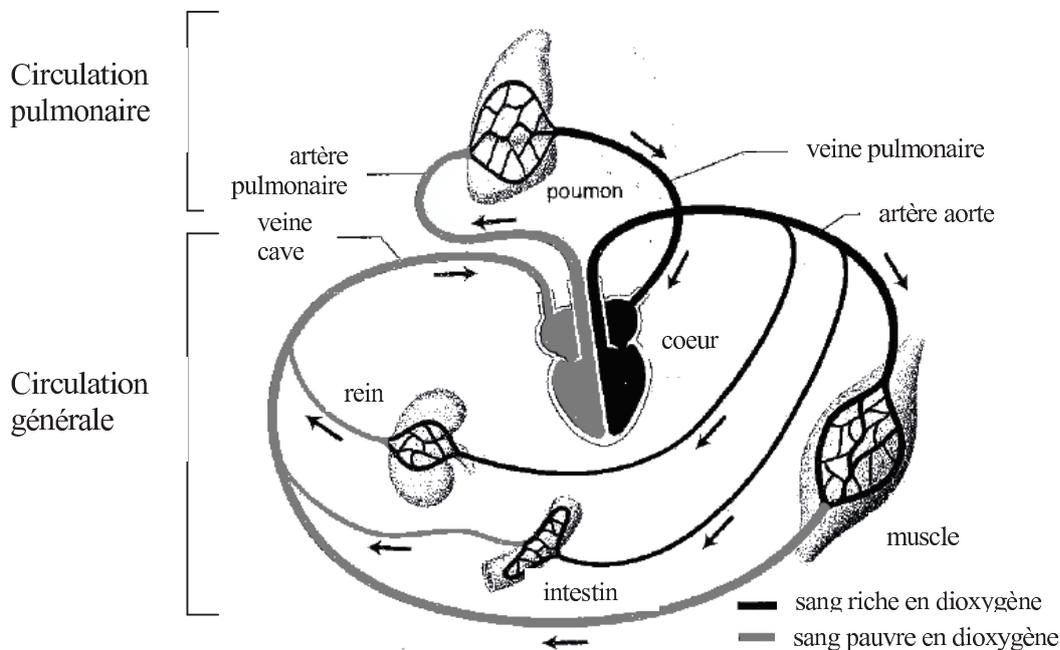
$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Pour la question Q10, on donne l'élément de volume en coordonnées cylindriques  $dV = r dr d\theta dz$  pour identifier l'équivalent volumique des forces de viscosité.

Le 18 décembre 2013 à l'hôpital européen Georges-Pompidou de Paris, le premier cœur 100 % artificiel et autonome était implanté sur un patient. Cette prouesse n'aurait pu être réalisée sans les nombreuses découvertes théoriques et expérimentales qui l'ont précédée. Aussi, nous nous proposons, dans ce problème, d'en étudier un des aspects : la circulation sanguine. Ce domaine de la physiologie est appelé l'hémodynamique.

La **figure 1** représente le système vasculaire humain. La cavité droite du cœur envoie le sang appauvri en dioxygène dans les poumons à travers l'artère pulmonaire. Les poumons enrichissent le sang en dioxygène. Le sang enrichi en dioxygène retourne dans le côté gauche du cœur et irrigue l'ensemble du corps puis revient au côté droit par la veine cave. Le système vasculaire issu de l'aorte se divise en artères, puis artérioles et capillaires. Le **tableau 1** page suivante donne, chez l'homme, le diamètre des différents types de vaisseaux et leur nombre.

Le cœur humain pèse environ 0,3 kilogramme et bat environ une fois toutes les secondes lorsqu'il est au repos. À chaque battement, son côté gauche injecte  $80 \text{ cm}^3$  de sang par l'aorte à la pression de 16 kPa. La puissance mécanique massique totale du cœur est de  $5 \text{ W.kg}^{-1}$ . Pour une durée de vie d'environ 80 années, cela en fait une source de travail remarquable.

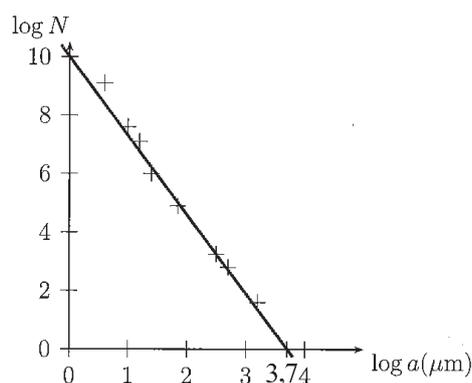


**Figure 1** – Le système vasculaire humain  
Le côté gauche du cœur est représenté à droite et le côté droit à gauche.

Vaisseau	Diamètre $2a$ (mm)	Nombre $N$
Artère aorte	$10^1$	1
Grandes artères	3	$4 \cdot 10^1$
Branches principales	1	$6 \cdot 10^2$
Branches secondaires	$6 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^3$
Branches tertiaires	$10^{-1}$	$8 \cdot 10^4$
Artères terminales	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^6$
Branches terminales	$3 \cdot 10^{-2}$	$10^7$
Artérioles	$2 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^7$
Capillaires	$8 \cdot 10^{-3}$	$10^9$

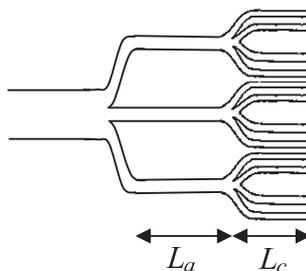
**Tableau 1** – Diamètres et nombres des différents types de vaisseaux chez l’homme

Le biologiste anglais C. Murray a étudié la relation qui existe entre le diamètre d’un vaisseau et le nombre de vaisseaux semblables. La **figure 2** où sont portés en échelle logarithmique les nombres de vaisseaux  $N$  en fonction de leur rayon  $a$  met en évidence cette relation.



**Figure 2** – Nombre de vaisseaux  $N$  en fonction de leur rayon  $a$

Cette relation peut être interprétée par un modèle simple. Le système vasculaire y est alors décrit par deux types de vaisseaux : des artères et des vaisseaux capillaires. Il est supposé être composé de  $N_a$  artères de longueur  $L_a$  et de rayon  $r_a$ , et de  $N_c$  vaisseaux capillaires de longueur  $L_c$  et de rayon  $r_c$  (**figure 3**).



**Figure 3** – Modélisation du système circulatoire artériel

En considérant alors un écoulement laminaire du sang, de viscosité  $\eta$ , qui se traduit par la loi de Poiseuille, l'expression de la résistance hydraulique de l'ensemble du système, que l'on retrouvera en **partie II**, vaut :  $R_{tot} = \frac{8 \cdot \eta}{\pi} \cdot \left( \frac{L_a}{N_a \cdot r_a^4} + \frac{L_c}{N_c \cdot r_c^4} \right)$ . Par ailleurs, si on admet que le corps se construit

en limitant la résistance hydraulique totale, on peut alors justifier qualitativement la loi de Murray théorique, qui traduit la loi de dépendance entre  $N_a$ ,  $r_a$ ,  $N_c$  et  $r_c$ . (**partie III**).

Pour une compréhension et une modélisation plus raffinées de la circulation sanguine dans les vaisseaux, il faut garder à l'esprit plusieurs caractéristiques du système vasculaire, qui le différencient d'un réseau d'adduction d'eau, par exemple :

- il est alimenté par une source pulsée : le cœur n'injecte du sang dans l'aorte que lors de la contraction du ventricule gauche ;
- les vaisseaux sanguins ne sont pas des tuyaux rigides : les tissus qui les constituent possèdent une certaine élasticité ;
- le sang n'est pas un liquide newtonien tel que l'eau. Son caractère non newtonien se traduit par exemple par le fait que sa viscosité dépend du diamètre du vaisseau dans lequel il s'écoule.

En s'appuyant sur les éléments donnés lors de l'introduction du problème 1, nous établirons dans la **partie I** certains résultats généraux de la circulation sanguine. La **partie II** nous conduira à justifier l'expression de la résistance hydraulique de l'ensemble du système vasculaire et la **partie III** nous permettra de comparer les lois de Murray théorique et expérimentale. Dans la **partie IV**, nous étudierons le rôle de l'élasticité des vaisseaux et la **partie V** traitera de la mesure de la vitesse de circulation du sang par effet Doppler. Ces cinq parties sont indépendantes.

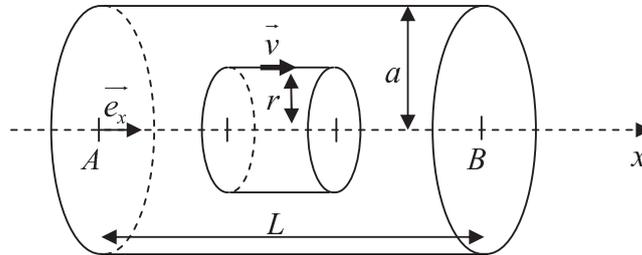
## Partie I – Généralités

- Q1.** Calculer le volume de sang qui circule chaque minute dans le système vasculaire. Vérifier qu'il correspond, environ, aux cinq litres de sang contenus dans le corps d'un adulte.
- Q2.** En considérant que le côté droit du cœur développe une puissance mécanique de 0,2 Watt, vérifier que la puissance mécanique massique totale du cœur est de  $5 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$ . On pourra notamment s'appuyer sur une analyse dimensionnelle.
- Q3.** En physiologie, on estime qu'environ 10 % de l'énergie reçue par un muscle est convertie en travail mécanique. À quoi peuvent correspondre les 90 % restants ?
- Q4.** Préciser la relation reliant le nombre de vaisseaux  $N$  à leur rayon  $a$ . Cette relation correspond à la loi expérimentale de Murray.
- Q5.** Estimer la vitesse moyenne du sang dans l'artère aorte.

## Partie II – Loi de Poiseuille

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible de masse volumique  $\rho$  et de viscosité  $\eta$  dans un tuyau cylindrique immobile dans le référentiel d'étude galiléen, centré sur l'axe horizontal ( $Ax$ ) de vecteur unitaire  $\vec{e}_x$ , de section circulaire de rayon  $a$  et de longueur  $L$  (**figure 4**, page suivante). Nous sommes alors en présence d'un écoulement de Poiseuille cylindrique. La pression à l'entrée du tube est  $P(x=0) = P_A$  et  $P(x=L) = P_B$  à la sortie. Le champ des vitesses est

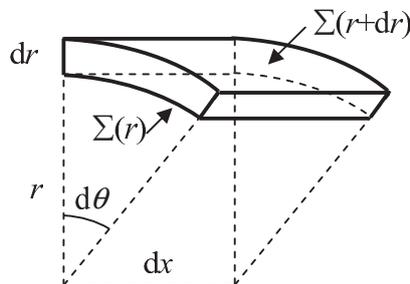
de la forme  $\vec{v}(M) = v(r) \cdot \vec{e}_x$ . Par ailleurs, un élément de fluide limité par une partie du cylindre d'axe  $(Ax)$  et de rayon  $r$ , de surface latérale  $\Sigma(r)$ , est soumis de la part du fluide situé entre les rayons  $r$  et  $a$  à la force de viscosité  $\vec{F} = \eta \cdot \frac{dv(r)}{dr} \cdot \Sigma(r) \cdot \vec{e}_x$ . On négligera les effets de la pesanteur.



**Figure 4** – Loi de Poiseuille pour un tube de section circulaire

- Q6.** Pourquoi choisit-on des pressions en entrée et en sortie différentes pour décrire cet écoulement ?
- Q7.** L'équation locale de la dynamique, ou équation de Navier-Stokes, pour les fluides incompressibles est :  $\rho \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \cdot (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{f}_{vol} - \text{grad}P + \eta \cdot \Delta \vec{v}$ .  
Donner la signification des différents termes de cette équation.
- Q8.** À quelle condition l'écoulement peut-il être considéré comme laminaire ? Tester cette condition pour l'écoulement dans l'artère aorte en considérant une viscosité dynamique de  $10^{-3}$  Pa.s et une masse volumique du sang de  $10^3$  kg.m<sup>-3</sup>. Commenter.
- Q9.** D'après les premiers éléments descriptifs de l'écoulement de Poiseuille cylindrique, simplifier l'équation de Navier-Stokes.

Pour définir la loi d'évolution  $v(r)$ , il faut préciser le terme  $\eta \cdot \Delta \vec{v}$ . Pour cela, il nous faut retrouver la densité volumique des forces de viscosité en calculant la résultante des forces de viscosité s'exerçant sur une particule de fluide possédant la forme décrite en **figure 5**.



**Figure 5** – Particule de fluide en géométrie cylindrique

**Q10.** Déterminer les expressions de la force de viscosité  $\overline{dF}_+$  appliquée sur la face supérieure de surface latérale  $\Sigma(r+dr)$  et de la force de viscosité  $\overline{dF}_-$  appliquée sur la face inférieure de surface latérale  $\Sigma(r)$ . Montrer que la résultante des forces de viscosité qui s'exercent sur la particule de fluide est donc :  $\overline{dF}_{visc} = \eta \cdot \left( \frac{d}{dr} \left( r \cdot \frac{dv}{dr} \right) \right) \cdot d\theta \cdot dx \cdot dr \cdot \vec{e}_x$ . En déduire la densité volumique des forces de viscosité  $\overline{f}_{v,visc}$ .

**Q11.** La pression dépend-elle de la variable  $\theta$ ? Projeter l'équation de Navier-Stokes et montrer que le champ des pressions est égal à  $P(x) = P_A - (P_A - P_B) \cdot \frac{x}{L}$  et que  $v(r) = \frac{(P_A - P_B)}{4 \cdot \eta \cdot L} \cdot (a^2 - r^2)$ .

**Q12.** Donner l'expression du débit volumique  $D_v$  de cet écoulement. En expliquant l'analogie avec la résistance électrique, montrer que la résistance hydraulique du tuyau vaut :  $R_H = \frac{8 \cdot \eta \cdot L}{\pi \cdot a^4}$ .

**Q13.** Justifier l'expression de la résistance hydraulique de l'ensemble du système vasculaire  $R_{tot}$ .

### Partie III – Loi de Murray

On suppose que l'organisme dispose d'un volume  $V_0$  donné de tissus pour réaliser les parois du système vasculaire et que l'épaisseur  $e$  d'un vaisseau est proportionnelle à son rayon extérieur  $r$  :  $e = \alpha \cdot r$  avec  $\alpha \ll 1$ .

**Q14.** Exprimer  $V_0$  en fonction de  $N_a, L_a, r_a, N_c, L_c, r_c$  et  $\alpha$ . En exprimant que le système circulatoire se construit en utilisant une quantité minimale et donc un volume  $V_0$  minimal de tissus, déterminer  $\frac{dr_c}{dr_a}$  en fonction de  $N_a, L_a, r_a, N_c, L_c, r_c$ .

**Q15.** Le corps se construit aussi de façon à minimiser la résistance hydraulique totale  $R_{tot}$  du système circulatoire. Montrer que cela entraîne une relation entre  $N_a, r_a, N_c, r_c$  que l'on identifiera comme étant la loi de Murray théorique.

**Q16.** Proposer des interprétations à l'écart entre la loi de Murray théorique et la loi expérimentale obtenue à la question **Q4**. Toute démarche construite, même inachevée, développant une réflexion physique sur les limites de la modélisation, sera prise en considération dans l'évaluation.

### Problème 3 – e3a PC 2008

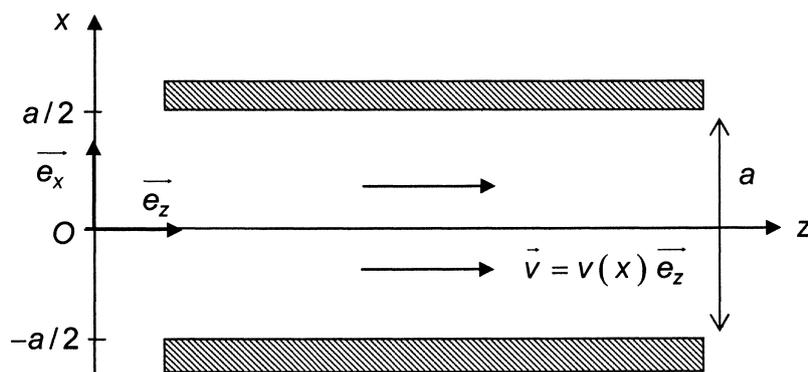
Dans une pièce d'habitation ou un bâtiment de stockage, il est souvent souhaitable de maintenir la température constante, indépendamment des variations de la température extérieure  $T_{\text{ext}}$ . Parmi les différents systèmes de régulation envisageables, le plus simple consiste à agir sur le débit du fluide caloporteur dans la conduite.

Cette partie est consacrée à l'analyse simplifiée d'un tel système de régulation.

La viscosité  $\eta$  du fluide s'écoulant dans le tube est désormais prise en compte. La pesanteur est négligée. Il est rappelé qu'alors, le champ de vitesse  $\vec{v}(M,t)$  et le champ de pression  $P(M,t)$  dans un fluide incompressible sont reliés par l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad} P + \eta \Delta \vec{v}$$

Pour simplifier les calculs, considérons une géométrie plane (figure 4) :



**Figure 4**

L'espace étant rapporté au trièdre cartésien Oxyz de base orthonormée directe  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , considérons un fluide en écoulement stationnaire et unidirectionnel entre les deux plans  $x = -a/2$  et  $x = a/2$  (figure 4). Le champ de vitesses est de la forme :  $\vec{v} = v(x)\vec{e}_z$ .

- 1\*a.** Exprimer  $\overline{\text{grad}P}$  en fonction de  $\eta$  et  $\frac{d^2v}{dx^2}$ .
- 1\*b.** En déduire que la pression P ne dépend que de z et montrer que la quantité  $K = -\frac{dP}{dz}$  est une constante.
- 1\*c.** Rappeler les conditions aux limites vérifiées par  $v(x)$  en  $x = \pm a/2$ .
- 1\*d.** Déterminer  $v(x)$  en fonction de  $x$ , K, a et  $\eta$ .  
Représenter graphiquement le profil de vitesse entre les deux plans.  
Justifier physiquement pourquoi la grandeur K doit être strictement positive pour que l'écoulement soit dirigé selon  $\vec{e}_z$ .
- 1\*e.** Montrer que le débit massique total transporté suivant  $\vec{e}_z$ , à travers une section de largeur H selon Oy, s'écrit :  $D_m = \alpha K a^3$ , en explicitant  $\alpha$  en fonction de  $\eta$ ,  $\rho$  et H.

## 2 / CONDUCTANCE HYDRAULIQUE

Considérons le système précédent, compris entre les abscisses  $z = 0$  et  $z = L$ .

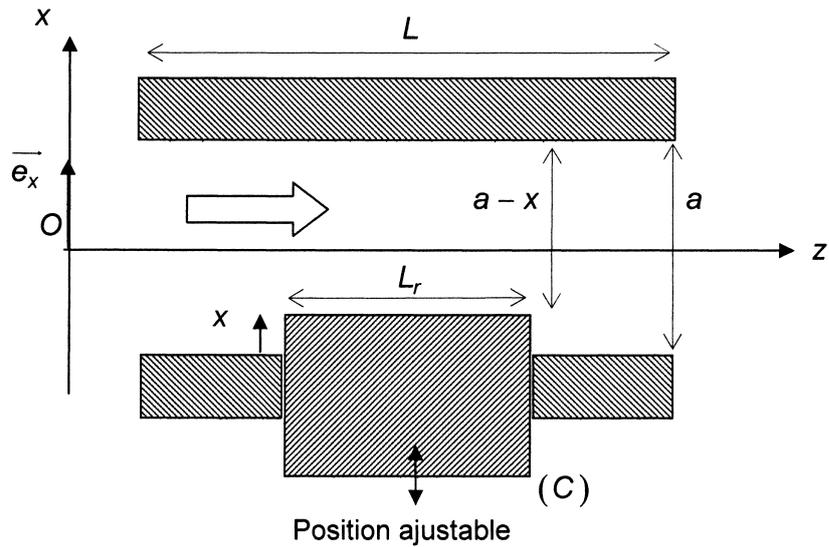
- 2\*a.** Exprimer la quantité K en fonction de  $P(0)$ ,  $P(L)$  et L.
- 2\*b.** Montrer que le débit à travers une section de largeur H selon Oy peut s'écrire :  
$$D_m = G_h [P(0) - P(L)],$$
où le terme  $G_h$  sera exprimé en fonction de  $\alpha$ , a et L.
- 2\*c.** Justifier le nom de « conductance hydraulique » pour  $G_h$  en faisant une analogie électrique. Préciser en particulier l'équivalent électrique de  $D_m$  et celui de la chute de pression  $P(0) - P(L)$ .

## 3 / CONTROLE DU DEBIT PAR CHANGEMENT DE SECTION

Le système, toujours invariant selon Oy, présente maintenant un rétrécissement ajustable (figure 5) de longueur  $L_r$ . Ce rétrécissement est obtenu à l'aide d'une pièce plane (C) (dite « pièce d'obstruction ») coulissant (de façon étanche !) selon Ox dans une ouverture pratiquée dans le plan inférieur. La position de cette pièce est repérée par le débordement x représenté en figure 5 ; au-dessus de (C), la largeur de la conduite devient  $a - x$ .

Il est admis que chaque portion (rétrécie ou non) se comporte comme le système infini étudié aux sous-parties 1 et 2 précédentes.

- 3\*a.** En considérant le système comme une association de conductances hydrauliques, exprimer le débit massique à travers une section droite de largeur H selon Oy en fonction de  $P(0) - P(L)$ ,  $\alpha$ , L,  $L_r$ , a et x.



**Figure 5**

La différence de pression  $P(0) - P(L)$  étant fixée, le débit est ajusté en modifiant la valeur de  $x$  autour d'une valeur moyenne  $x_0$ . Les déplacements de (C) sont de faible amplitude, si bien qu'il est possible de poser  $x = x_0 + \varepsilon$ , avec  $\varepsilon \ll x_0$ .

**3\*b.** Montrer qu'au premier ordre en  $\varepsilon$ , le débit massique peut s'écrire :

$$D_m = D_{m0} (1 - b\varepsilon), \quad (6)$$

en posant  $D_{m0} = \frac{\alpha [P(0) - P(L)]}{\frac{L - L_r}{a^3} + \frac{L_r}{(a - x_0)^3}}$  et où  $b$  est une constante positive à exprimer en

fonction de  $L$ ,  $L_r$ ,  $a$  et  $x_0$ .

△ △ △ Fin du devoir.