

D2-TD

Correction

D2 – 19 Astéroïde radioactif

1) Bilan en régime stationnaire : l'énergie thermique qui sort de la sphère de rayon $r + dr$ vaut celle qui sort de la sphère de rayon r plus ce qui a été créé entre r et $r + dr$. Donc

$$j(r + dr) S(r + dr) dt = j(r) S(r) dt + \dot{q} dt \varrho 4 \pi r^2 dr$$

soit

$$\frac{d(j r^2)}{dr} = \dot{q} \varrho r^2$$

qui s'intègre en

$$j(r) = \frac{\dot{q} \varrho r}{3} + A \quad \text{avec} \quad A \text{ une constante d'intégration.}$$

Puis la loi de Fourier donne $j(r) = -\kappa \frac{dT}{dr}$ donc en intégrant

$$T(r) = -\frac{\dot{q} \varrho r^2}{6 \kappa} - \frac{A \ln r}{\kappa} + B \quad \text{avec} \quad B \text{ une constante d'intégration.}$$

Or $T(0) \neq \infty$ donc $A = 0$. Et $T(R) = T_S$ donc

$$T(r) = T_S + \frac{\dot{q} \varrho}{6 \kappa} (R^2 - r^2)$$

2) Le flux thermique qui arrive par diffusion en surface est égale au flux thermique évacué par radiation donc

$$\sigma T_S^4 4 \pi R^2 = j(R) 4 \pi R^2$$

On obtient

$$T_S = \left(\frac{\dot{q} \varrho R}{3 \sigma} \right)^{1/4} = 20 \text{ K}$$