Correction de l'interrogation

O5 : Phénomènes d'absorption et de dispersion

Questions

On étudie un milieu dans lequel l'équation de propagation des ondes sonores est

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\omega_c^2}{c^2}\,p$$

pour la surpression p, où ω_c est une constante.

1) On cherche une solution en notation complexe sous la forme $\underline{p}(x,\,t) = \underline{p_m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega\,t - \underline{k}\,x)}$, où $\underline{p_m}$ est une amplitude complexe $\underline{p_m} = p_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$. Quelle relation doit alors être vérifiée par $\underline{k}$ et ω ? On ne cherchera pas à écrire explicitement $\underline{k}$.

Si $\underline{p} \neq 0$ vérifie l'équation de propagation, alors

$$-\underline{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega_c^2}{c^2}$$

On se contente ensuite d'écrire $\underline{k}^2$:

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$$

2) Comment appelle-t-on une telle relation ?

C'est une **relation de dispersion.**

3) On suppose $\omega < \omega_c$. Calculer $\underline{k}$ en fonction de ω dans ce cas.

Dans ce cas, $\underline{k}^2$ est réel et négatif donc $\underline{k}$ est purement imaginaire :

$$\underline{k} = \pm\,\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{c}$$

4) Toujours sous l'hypothèse $\omega < \omega_c$, expliciter l'onde réelle de surpression. Comment appelle-t-on une telle onde ? Conclure.

L'onde réelle est dans ce cas

$$p(x,\,t) = p_m\,\cos(\omega\,t + \varphi)\,\mathrm{e}^{\pm K\,x} \qquad \text{avec} \qquad K = \frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{c}$$

C'est une onde **stationnaire** (et non progressive !). En conclusion, des ondes de pulsation $\omega < \omega_c$ ne peuvent se propager dans un tel milieu : le milieu joue le rôle de filtre passe-haut dans le sens où il ne laisse se propager que des ondes de pulsations $\omega > \omega_c$.

Remarque. Une telle onde, stationnaire et exponentiellement amortie, est joliment appelée **onde évanescente**.