HO-08 Oscillations d'un bouchon de liège

1) À l'équilibre, la somme des forces qui s'exercent sur le bouchon est nulle.

volume du bouchon

<u>syst</u> le bouchon (de masse $\rho \overbrace{Sh}$)

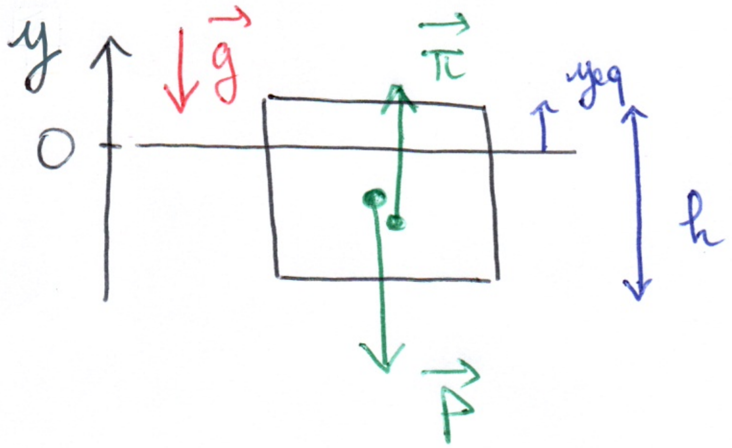
<u>Ref</u> terrestre supposé galiléen

<u>BdF</u> poids $\vec{P} = \rho S h \vec{g}$

volume du fluide déplacé

poussée d'Archimède $\vec{\pi} = -\rho_e \overbrace{S(h-y)} \vec{g}$

("opposé du poids du fluide déplacé")



<u>PFD</u> À l'équilibre $\vec{P} + \vec{\pi} = \vec{0}$ soit, projeté sur (Oy) :

$$-\rho S h g + \rho_e S (h - y_{eq}) g = 0$$

et donc $\boxed{y_{eq} = \frac{(\rho_e - \rho)}{\rho_e} h}$

2) Hors équilibre, l'accélération du centre de masse du bouchon est la même que celle de son bord haut. Elle s'écrit donc

$$\vec{a} = \ddot{y}\,\vec{e_y}$$

et le PFD s'écrit cette fois

$$\rho S h \ddot{y} = -\rho S h g + \rho_e S(h-y) g$$

après projection sur (Oy).

On obtient alors l'équation différentielle suivante

$$\boxed{\ddot{y} + \frac{\rho_e}{\rho}\frac{g}{h} y = \frac{\rho_e - \rho}{\rho} g}$$

On reconnait l'équation d'un oscillateur harmonique.

3) La solution de cette équation peut s'écrire

$$y(t) = \underbrace{A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}_{\text{solution de l'équation homogène}} + \underbrace{\frac{\rho_e - \rho}{\rho_e} h}_{\substack{\text{solution particulière} \\ (= y_{eq}\,!)}}$$

avec $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{\rho_e g}{\rho h}}}$ la pulsation propre des oscillations.

Les conditions initials $\begin{cases} y(0) = y_{eq} + \delta y \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$

soit

$$\begin{cases} A + y_{eq} = y_{eq} + \delta y \\ B\omega = 0 \end{cases}$$

donc $B = 0$ et $A = \delta y$. Finalement

$$\boxed{y(t) = \delta y \cos(\omega t) + y_{eq}}$$

4) Par définition, $T \equiv \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\rho h}{\rho_e g}}$

AN $\boxed{T = 0{,}2 \text{ s}}$

Ce qui correspond à 5 oscillations par seconde, pas très réaliste me semble-t-il. Ça reste un ordre de grandeur décent.