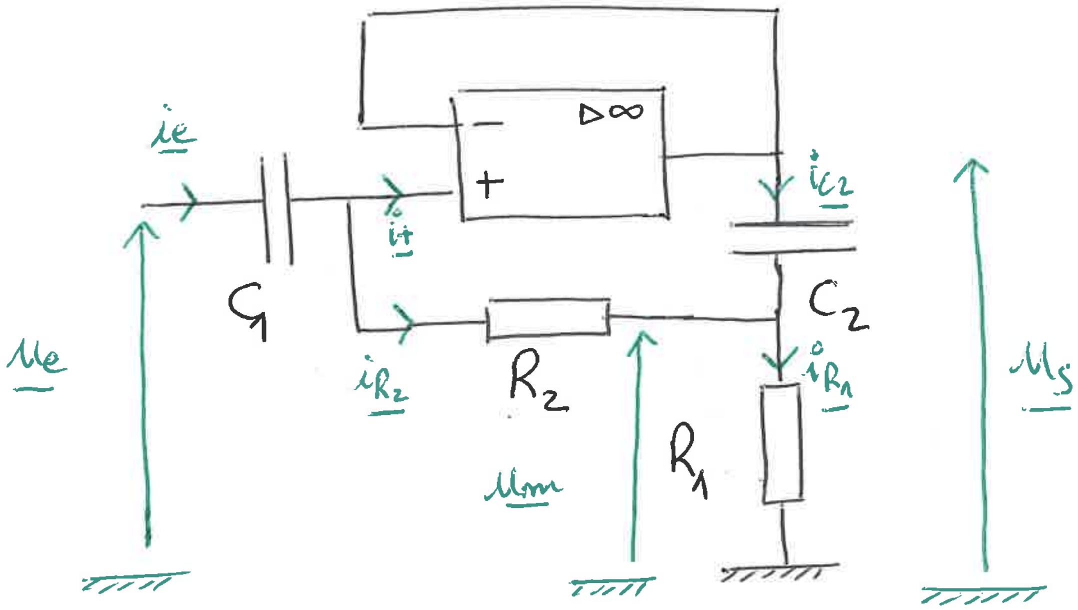
E3-01



1) Puisqu'on nous demande la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$ de ce circuit, c'est que l'ALI fonctionne en régime linéaire :

$$\boxed{V_+ = V_-}$$

Or $V_- = \underline{u_s}$ donc $V_+ = \underline{u_s}$.

Par ailleurs, l'ALI étant idéal, $\underline{i_e} = \underline{i_{R_2}}$ car $\boxed{\underline{i_+} = 0.}$

D'où

$$C_1 \frac{d(\underline{u_e} - \underline{u_s})}{dt} = \underline{i_{R_2}} \qquad (1)$$

En introduisant $\underline{u_m}$, on écrit par loi d'Ohm

$$\underline{i_{R_2}} = \frac{\underline{u_s} - \underline{u_m}}{R_2} \qquad (2)$$

Par loi des noeuds, $\underline{i_{C_2}} = \underline{i_{R_1}} - \underline{i_{R_2}}$ (3)

et $\begin{cases} \underline{i_{R_1}} = \dfrac{\underline{u_m}}{R_1} \text{ d'une part,} & (4) \\ \underline{i_{C_2}} = C_2 \dfrac{d(\underline{u_s} - \underline{u_m})}{dt} \text{ d'autre part.} & (5) \end{cases}$

Alors, avec (1), qu'on passe en notation complexe, et (2) :

$$j\omega C_1 (\underline{u_e} - \underline{u_s}) = \frac{1}{R_2}(\underline{u_s} - \underline{u_m}) \quad (6)$$

et avec (5) dans (3) :

$$j\omega C_2 (\underline{u_s} - \underline{u_m}) = \frac{1}{R_1}\underline{u_m} - \frac{\underline{u_s} - \underline{u_m}}{R_2}$$

ce qui permet d'obtenir $\underline{u_m}$ en fonction de $\underline{u_s}$ uniquement :

$$\left(j\omega C_2 + \frac{1}{R_2}\right)\underline{u_s} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_2\right)\underline{u_m}$$

Faisons alors disparaître $\underline{u_m}$ de (6) :

$$j\omega C_1 \underline{u_e} - \left(j\omega C_1 + \frac{1}{R_2}\right)\underline{u_s} = -\frac{1}{R_2}\underline{u_m}$$

$$= -\frac{1}{R_2}\,\frac{(1/R_2 + j\omega C_2)}{1/R_1 + 1/R_2 + j\omega C_2}\,\underline{u_s}$$

$$= -\frac{1 + j\omega R_2 C_2}{\frac{R_2^2}{R_1} + R_2 + j\omega R_2^2 C_2}\,\underline{u_s}$$

soit

$$j\omega C_1 \underline{u_e} = \left(j\omega C_1 + \frac{1}{R_2} - \frac{1 + j\omega R_2 C_2}{\frac{R_2^2}{R_1} + R_2 + j\omega R_2^2 C_2} \right) \underline{u_s}$$

$$= \underline{u_s} \; \frac{j\omega C_1 \left(\frac{R_2^2}{R_1} + R_2 + j\omega R_2^2 C_2 \right) + \frac{R_2}{R_1} + \cancel{1} + j\omega \cancel{R_2} C_2 - \cancel{1} - j\omega \cancel{R_2}}{\frac{R_2^2}{R_1} + R_2 + j\omega R_2^2 C_2}$$

$$= \underline{u_s} \; \frac{j\omega C_1 \left(R_2^2 + R_1 R_2 + j\omega R_2^2 R_1 C_1 \right) + R_2}{R_2^2 + R_1 R_2 + j\omega R_2^2 C_2 R_1}$$

$$= \underline{u_s} \; \frac{j\omega C_1 \left(R_2 + R_1 + j\omega R_1 R_2 C_1 \right) + 1}{R_2 + R_1 + j\omega R_2 C_2 R_1}$$

et finalement

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{j C_1 \omega \left(R_1 + R_2 + j\omega R_2 C_2 R_1 \right)}{1 + j C_1 \omega \left(R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C_2 \right)}}$$

C'est bien la formule de l'énoncé (et il y a sûrement un chemin plus court pour y arriver).

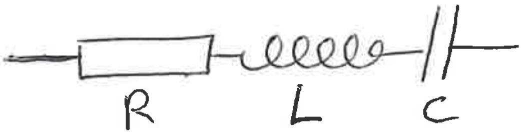
2) On a $\underline{i_e} = C_1 \dfrac{d(\underline{u_e} - \underline{u_s})}{dt} = j\omega C_1 (1 - \underline{H}) \underline{u_e}$

soit $\underline{Z_e} = \dfrac{1}{j\omega C_1 (1 - \underline{H})} = \; ?$ Calculons $1 - \underline{H}$ d'abord.

$$1 - \underline{H} = \frac{1}{1 + jC_1\omega\left(R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C_2\right)}$$ en réduisant au même dénominateur.

donc $$\boxed{\underline{Z_e} = \frac{1}{jC_1\omega} + R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C_2}$$

3) L'impédance d'un circuit RLC série est



$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

On identifie alors sur $\underline{Z_e}$ les termes "en rien", "en $j\omega$" et "en $1/j\omega$" :

$$\boxed{\begin{cases} R = R_1 + R_2 \\ C = C_1 \\ L = R_1 R_2 C_2 \end{cases}}$$

Et on comprend que le circuit présente des effets inductifs (terme en $j\omega$) alors qu'il ne contient pas de bobine !