CCINP Physique PC 2021 – Partie microfluidique

Q32/ L'énoncé écrit

$$\underbrace{\rho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}}_{\text{accélération convective}} = \underbrace{-\overrightarrow{\text{grad}}\,P}_{\text{équivalent volumique des forces de pression}} + \overbrace{\eta\Delta\vec{v}}^{\text{équivalent volumique des forces de viscosité}}$$

L'équation de Navier Stokes est un principe fondamental de la dynamique ($m\vec{a} = \sum\vec{F}$) écrit sous forme volumique

Q33/ Le nombre de Reynolds s'écrit $\boxed{Re = \frac{\rho L V}{\eta}}$

avec $\begin{cases} L \text{ une longueur typique} \\ V \text{ une vitesse typique} \end{cases}$.

Ici, avec l'énoncé, $L = 10\ \mu m$ et $V = 1\ mm.s^{-1}$ d'où

$$Re = \frac{10^3 \times 10\times10^{-6} \times 1 \times 10^{-3}}{1\times 10^{-3}}$$

soit $\boxed{Re = 10^{-2}}$

Puisque $Re \ll 2000$, l'écoulement est laminaire.

Cependant, l'énoncé invite à aller plus loin ici. Puisque le nombre de Reynolds est construit comme le rapport en ordre de grandeur du terme convectif et du terme visqueux de l'équation de Navier-Stokes, On a donc

$$\mathrm{Re} \sim \text{“}\,\frac{\| \rho (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \|}{\| \eta \Delta \vec{v} \|}\,\text{”} \quad \text{en OdG}$$

comme ici $\mathrm{Re} \ll 1$, on peut conclure que le terme convectif est très faible devant le terme visqueux. En première approximation, on peut donc le négliger complètement et poser

$$\rho (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{0}.$$

Dans ces conditions, l'équation de Navier-Stokes devient

$$\boxed{\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \eta \Delta \vec{v}}$$

Q34) En considérant un champ de vitesse $\vec{v} = v_x(z)\, \vec{u_x}$, on peut calculer explicitement

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \equiv \left| \begin{array}{l} v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \dfrac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{array} \right. = \vec{0}$$

en coordonnées cartésiennes

car $v_y = v_z = 0$ et $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} = \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = 0$. Ainsi, le terme convectif de l'équation de Navier-Stokes est nul effectivement, comme supposé à la question 32.

Q35/ À ce stade, on a $-\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \eta \Delta \vec{v} = \vec{0}$

On calcule

$$\Delta \vec{v} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \dfrac{d^2 v_x}{dz^2} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

coordonnées cartésiennes

car $v_x = v_y = 0$ et $\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$.

La projection de NS sur $\vec{u}_x$ conduit alors à

$$\boxed{-\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{d^2 v_x}{dz^2} = 0}$$

Q36/ L'énoncé donnant $\dfrac{\partial P}{\partial x} = -K$, cela conduit à

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2} = -\frac{K}{\eta}$$

En intégrant $\dfrac{d v_x}{dz} = -\dfrac{K}{\eta} z + A$ (1)

puis une seconde fois

$$v_x(z) = -\frac{K}{\eta}\frac{z^2}{2} + Az + B \quad (2)$$

avec A et B deux constants d'intégration, à déterminer par les 2 conditions aux limites de l'énoncé.

$$\begin{cases} -\dfrac{K}{\eta}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{h^2}{4}\right) + A\dfrac{h}{2} + B = -L_g\left(-\dfrac{K}{\eta}\dfrac{h}{2} + A\right) & (*) \\ -\dfrac{K}{\eta}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{h^2}{4}\right) - A\dfrac{h}{2} + B = L_g\left(\dfrac{K}{\eta}\dfrac{h}{2} + A\right) & (**) \end{cases}$$

en utilisant (1) et (2). On calcule alors

$$\begin{array}{ll} (*) + (**) & \begin{cases} -\dfrac{K}{\eta}\dfrac{h^2}{4} + 2B = L_g\dfrac{K}{\eta}h \\ Ah = -2L_g A \end{cases} \\ (*) - (**) & \end{array}$$

d'où

$$\begin{cases} B = \dfrac{K}{\eta}\dfrac{h}{2}\left(L_g + \dfrac{h}{4}\right) \\ A = 0 \end{cases}$$

Finalement

$$v_x(z) = -\frac{K}{\eta}\frac{z^2}{2} + \frac{K}{\eta}\frac{h}{2}\left(L_g + \frac{h}{4}\right)$$

soit

$$\boxed{v_x(z) = \frac{K}{2\eta}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) + \frac{K h L_g}{2\eta}}$$

Q37, z_0 est l'altitude à laquelle la vitesse s'annule $v_x(z_0) = 0$ soit

$$\frac{K L_g h}{2\eta} + \frac{K}{2\eta}\left(\frac{h^2}{4} - z_0^2\right) = 0$$

d'où $$z_0^2 = h\left(L_g + \frac{h}{4}\right)$$

donc $$\boxed{z_0 = \pm\sqrt{h\left(L_g + \frac{h}{4}\right)}}$$

On peut poursuivre le calcul par un développement limité. On rappelle $\sqrt{1+\varepsilon} \sim 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$ à l'ordre 1 en ε. On écrit

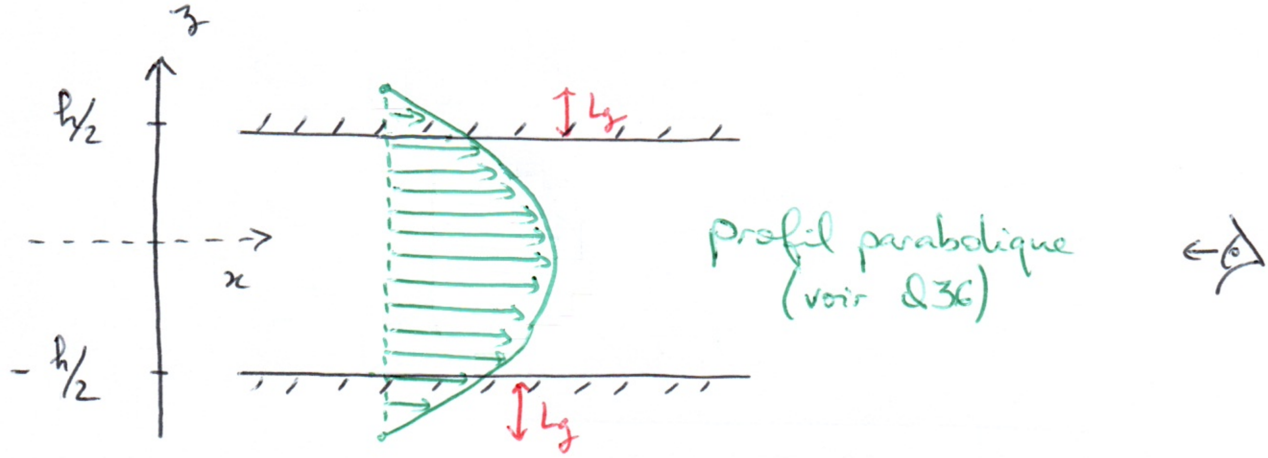
$$z_0 = \pm\sqrt{\frac{h^2}{4}\left(1 + \frac{4L_g}{h}\right)}$$

soit $$|z_0| = \frac{h}{2}\sqrt{1 + \frac{4L_g}{h}}$$

$$\sim \frac{h}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{4L_g}{h}\right) \quad \text{si } L_g \ll h$$

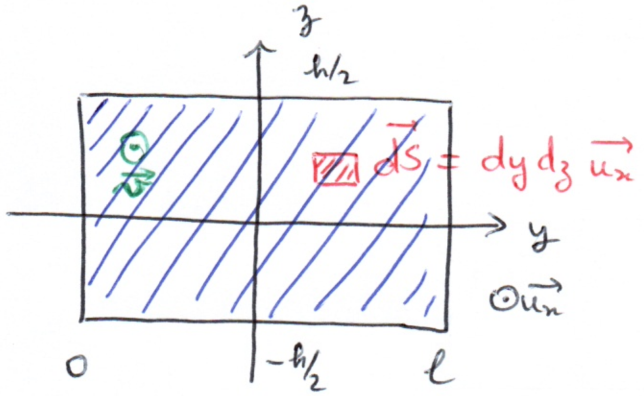
donc $$\boxed{|z_0| \sim \frac{h}{2} + L_g}$$

En schéma (largement exagéré puisqu' "en vrai" on aurait $L_g \ll h$) :



Par rapport à des conditions aux limites "normales" (c'est-à-dire que le fluide a une vitesse nulle à la paroi) ici le fluide voit sa vitesse non nulle sur les parois : il y a un "glissement" du fluide sur celles-ci.

Q38) Du point de vue de l'oeil dessiné figure précédente, on voit



On calcule alors le débit volumique sur cette section de l'écoulement par

$$D_V \equiv \iint_{\text{section bleue}} \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

soit

$$D_V = \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{\ell} dy \left\{ \frac{K L_g h}{2\eta} + \frac{K}{2\eta}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \right\} \cancel{\vec{u_x}} \cdot \cancel{\vec{u_x}}$$

d'où

$$D_v = \left(\int_0^{\ell} dy\right)\left(\int_{-h/2}^{h/2} dz \left\{\frac{KLgh}{2\eta} + \frac{K}{2\eta}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\right\}\right)$$

$$= \frac{\ell K}{2\eta}\left(Lgh \times h + \left[\frac{h^2}{4}z - \frac{z^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2}\right)$$

$$= \frac{\ell K}{2\eta}\left(Lgh^2 + \frac{h^3}{4} - \frac{h^3}{12}\right)$$

$$\boxed{D_v = \frac{\ell K}{2\eta} h^2 \left(Lg + \frac{h}{6}\right)}$$ pour finir.

Q39, On avait $\frac{dP}{dx} = -K$ soit $P(z) = -Kz + C$

avec C une constante d'intégration. On a les conditions aux limites

$$\begin{cases} P(z=L) = P(L) \\ P(z=0) = P(0) \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} C = P(0) \\ \boxed{K = \frac{-P(L) + P(0)}{L}} \end{cases}$$

soit

$$\boxed{P(z) = -\frac{\Delta P}{L} z + P(0)}$$

Q40/ En revenant aux résultats de Q38 et Q39, on a directement

$$D_v = \frac{\ell h^2}{2\eta}\left(L_g + \frac{h}{6}\right) \times \frac{\Delta P}{L}$$

d'où, avec le tableau d'analogie suivant

	Électrocinétique	Hydraulique
tension	$U = \Delta V$	ΔP
intensité	I	D_v
loi d'ohm	$U = RI$	$\Delta P = R_h D_v$

on identifie

$$\boxed{R_h = \frac{2\eta L}{\ell h^2} \frac{1}{L_g + \frac{h}{6}}}$$

la résistance hydraulique.

Q41/ On a $R_{hng} = \dfrac{12\eta L}{\ell h^3}$

Alors, pour $L_g/h = 1/2$, on obtient

$$R_h = R_{hng} \frac{1}{1 + \frac{6L_g}{h}} = \frac{R_{hng}}{4}$$

d'où $\boxed{\dfrac{R_h}{R_{hng}} = \dfrac{1}{4}}$. Le glissement diminue de 75% la résistance.