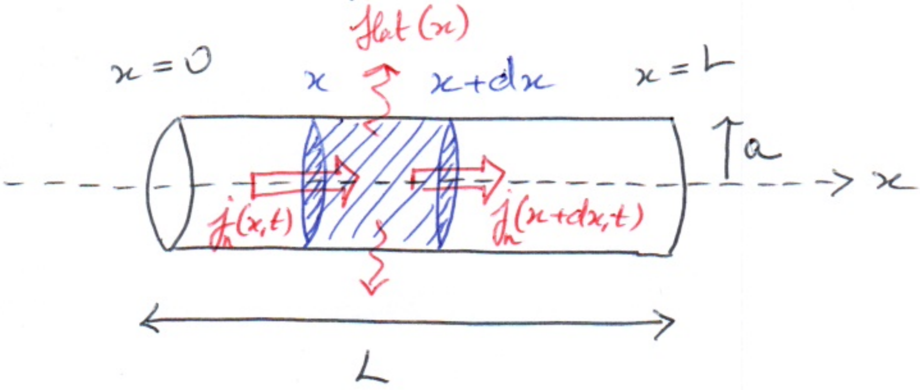
# D1 - 06 Diffusion dans un tuyau poreux.

On commence par un schéma




1) On considère le système entre $x$ et $x+dx$, et on calcule la variation du nombre de particules diffusantes dedans entre $t$ et $t+dt$.

On a d'une part

(a) $$d^2N = \frac{\partial n}{\partial t}(\pi a^2)\,dx\,dt \qquad (= \text{"à } t+dt\text{"} \ominus \text{"à } t\text{"})$$

Et d'autre part

(b) $$d^2N = j_n(x,t)(\pi a^2)dt - j_n(x+dx,t)(\pi a^2)dt - j_{lat}(x)\underbrace{(2\pi a\,dx)}_{\text{surface latérale}}dt$$

(= "ce qui rentre en $x$" ⊖ "ce qui sort en $x+dx$" ⊖ "ce qui sort latéralement")

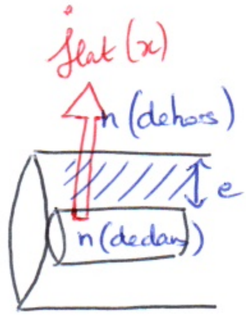
soit $$d^2N = -\frac{\partial j_n}{\partial x}(\pi a^2)\,dt\,dx - 2\pi a\, j_{lat}\,dx\,dt$$

Reste à préciser $j_{lat}$, et cela demande une prise d'initiative

La loi de Fick à travers la paroi latérale donne

$$j_{lat} = -D' \frac{dn}{dr}$$

Si on suppose, puisque l'épaisseur latérale est toute petite $e \ll a$, que la dérivée peut-être approximée par la différence finie




$$\frac{dn}{dr} \simeq - \frac{n\,(\text{dans le tube}) - n\,(\text{dehors})}{e}$$

Si on suppose de plus que la densité de particules dehors est nulle (car très faible, on est hors du tube) alors

$$\frac{dn}{dr} \simeq - \frac{n(x)}{e} \qquad \left( \begin{array}{l} \text{si } n\,(\text{dehors}) \simeq 0 \\ n\,(\text{dedans}) = n(x) \end{array} \right)$$

et donc

$$j_{lat} = + D' \frac{n(x)}{e}$$

Finalement, avec (a) et (b), on obtient

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_n}{\partial x} = - \frac{2}{a} \frac{n}{e} D'}$$

2) Une autre loi de Fick, cette fois dans le tube, donne

$$j_n = -D\frac{\partial n}{\partial x}$$

d'où

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = -\frac{2D'}{ea}n$$

En régime stationnaire, cela amène à

$$\boxed{\frac{d^2n}{dx^2} = \frac{2D'}{Dea}n} \qquad \text{car } \frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

Cette équation se résout en

$$n(x) = A\exp(\alpha x) + B\exp(-\alpha x)$$

$$\text{avec } \alpha = \sqrt{\frac{2D'}{Dea}}$$

et les conditions aux limites

$$\begin{cases} n(0) = n_0 \\ n(L) = n_1 \end{cases} \quad \text{amène} \quad \begin{cases} A + B = n_0 \\ Ae^{\alpha L} + Be^{-\alpha L} = n_1 \end{cases}$$

si $\alpha L \gg 1$, alors $e^{-\alpha L} \ll 1$ donc

$$Ae^{\alpha L} = n_1 \text{ et } A = n_1 e^{-\alpha L}$$

puis $B = n_0 - A = n_0 - n_1 e^{-\alpha L} \simeq n_0$

Finalement

$$\boxed{n(x) \simeq n_1 e^{-\alpha(L-x)} + n_0 e^{-\alpha x}}$$